

ANALYSIS

Mit *Analysis* bezeichnet man heute ein außerordentlich großes Teilgebiet der Mathematik, das zahlreiche Disziplinen mit umfangreichen Anwendungen in anderen Gebieten der Mathematik sowie in den Naturwissenschaften und der Technik umfasst. Viele Vorgänge in Natur und Technik kann man nur mithilfe der Analysis adäquat beschreiben – sei es z.B., um die Gesetze der Planetenbewegung abzuleiten, die Schwingungen einer Saite bzw. eines Pendels zu erfassen oder auch die Temperaturverteilung in einem Körper zu kennzeichnen.

Diese Sachverhalte lassen sich jedoch nicht mit diskreten Größen beschreiben, denn die Bewegungsgrößen, die Temperatur usw. ändern sich kontinuierlich. Historisch gesehen bildete die Lösung dieses Problems einen der Ausgangspunkte für die Entstehung der Analysis im 17. Jahrhundert. Die Mittel der Arithmetik und Algebra reichten dazu nicht aus, denn sie konnten den Zustand nur für einzelne konkrete Situationen, etwa für einen festen Zeitpunkt oder die durchschnittliche Entwicklung über einen gewissen Zeitraum wiedergeben, nicht aber den eigentlichen Verlauf des Prozesses. Nur in wenigen Fällen war eine adäquate Beschreibung des jeweiligen Sachverhalts mit geometrischen Mitteln möglich. Die Lösung dieses Problems markierte einen entscheidenden Wendepunkt in der Mathematik, die ihren Charakter grundlegend veränderte: Man ging von der Betrachtung diskreter Größen über zur Untersuchung variabler Größen, die ihren Wert kontinuierlich verändern. Für derartige Untersuchungen bedurfte es zugleich eines neuen Mittels, um die Abhängigkeit zwischen variablen Größen zu erfassen, um die den jeweiligen Vorgang beschreibende Gesetzmäßigkeit formulieren zu können. Dies führte zur Herausbildung des Funktionsbegriffs, der zu einem zentralen Begriff der Analysis wurde. Mit dem Studium der Eigenschaften von Funktionen erwuchs den Mathematikern ein riesiges Aufgabenfeld. Diese Forschungen bildeten dann den Gegenstand der Analysis bzw. ihrer Teilgebiete.

Es würde jedoch den historischen Werdegang unzulässig vereinfachen, wenn man die Entstehung der Analysis auf die Beschäftigung mit den wenigen genannten Problemen reduzierte. Erwähnt werden muss zunächst auch die Fülle von Mechanismen, die in jenen Jahren erfunden und durch deren Konstruktion die „*Mechanici*“, die Ingenieure jener Zeit, vor die Aufgabe der Beherrschung von Bewegungsabläufen gestellt wurden. Zu diesen Geräten gehörten Windmühlen, Pumpwerke, Kräne, Schleifmaschinen, Schiffshebewerke, Papiermühlen, Maschinen zur Wasserhaltung in Bergwerken, Pochwerke usw. Es gab aber noch zwei weitere Problemkreise, die die Mathematiker im 17. Jahrhundert nicht minder bewegten und auf den Weg zur Analysis führten: Zum einen mechanisch-geometrische Probleme, wie sie mit der Bestimmung des Flächen- oder Volumeninhalts bzw. des Schwerpunkts eines unregelmäßig begrenzten Körpers beschrieben werden, und zum anderen geometrische Probleme im engeren Sinne, die die Untersuchung der Eigenschaften von Kurven, Flächen und Körpern zum Gegenstand hatten und die mit der Ermittlung der Tangente an eine beliebige Kurve in einem einfachen Fall umschrieben sind. Diese stärker geometrisch orientierten Fragestellungen lassen auch erahnen, wie wichtig die von R. DESCARTES (1596–1650) und P. DE FERMAT (1601–1665) entwickelten Anfänge der analytischen Geometrie für die Entstehung der Analysis waren. Durch die analytische Geometrie erhielten die Mathematiker ein Mittel, um den verschiedenen geometrischen Objekten, den grafischen Veranschaulichungen von einzelnen Vorgängen eine Formel zuzuordnen, die das geometrische Objekt völlig beschrieb.

Charakteristisch für die Lösung der genannten Probleme war das Auftreten von Grenzwertprozessen. Um beispielsweise den Anstieg der Tangente an eine beliebige Kurve im Punkt $(x_0; y_0)$ zu ermitteln, führt man folgende Überlegung durch: Man wählt in der Umgebung des Punktes $(x_0; y_0)$ einen zwei-

ten Punkt $(x_1; y_1)$ und bestimmt die Sekante durch die Punkte $(x_0; y_0)$ und $(x_1; y_1)$. Der Anstieg dieser Sekante wird den gesuchten Tangentenanstieg umso besser approximieren, je näher der Punkt $(x_1; y_1)$ am Berührungspunkt $(x_0; y_0)$ liegt. Man erhält also den Tangentenanstieg aus dem Anstieg der Sekante, wenn man anschaulich den Punkt $(x_1; y_1)$ längs der Kurve zum Punkt $(x_0; y_0)$ bewegt. Eine ähnliche Argumentation lässt sich für die Ermittlung der Momentangeschwindigkeit formulieren. Bei der Bestimmung des Inhalts einer krummlinig begrenzten Fläche F wird man in die Fläche einfach berechenbare, geradlinig begrenzte Flächen F_n , z.B. Rechtecke, einbeschreiben bzw. F in solche Flächen einschließen und dann die Summe dieser Teilflächen F_n bilden. Je kleiner man diese Rechtecke wählt, umso besser werden sie die Fläche F ausschöpfen bzw. einschließen. In beiden Fällen müssen also Grenzprozesse durchgeführt werden und die beiden Beispiele markieren auch die typischen Fälle: Im ersten Fall muss der Grenzwert eines Bruches bestimmt werden, wobei Zähler und Nenner immer kleiner (man sagt auch *infinitesimal* oder *unendlich klein*) werden. Bei naiver Betrachtungsweise ergäbe sich also am Ende ein Bruch $\frac{0}{0}$. Im zweiten Fall müssen, vereinfacht formuliert, unendlich viele Objekte summiert werden, die alle unendlich klein sind; man müsste also, wieder naiv betrachtet, „ $\infty \cdot 0$ “ bestimmen. Für diese Fragen wird die Analysis eine überraschende Antwort präsentieren. Das erste Beispiel wird zu den Begriffen des Differentialquotienten und der Ableitung führen, das zweite zu den Begriffen der unendlichen Reihe und des Integrals.

Die Lösung der oben skizzierten umfangreichen Aufgabe war das Werk mehrerer Mathematikergenerationen. Bereits in der Antike lassen sich erste Überlegungen dazu finden, doch begann die intensive Beschäftigung mit diesen Fragen erst im 17. Jahrhundert. Der Physiker G. GALILEI (1564–1642), der Astronom J. KEPLER (1571–1630), der Philosoph R. DESCARTES sowie der Jurist und Mathematiker P. DE FERMAT waren einige der Wegbereiter bei der Herausbildung der Analysis. Die Grundlagen der Theorie wurden dann von I. NEWTON (1643–1727) und G. W. LEIBNIZ (1646–1716) gelegt. Newton fand die Grundgedanken zur Infinitesimalmathematik Mitte der 60er Jahre des 17. Jahrhunderts, eine Ausarbeitung der Theorie publizierte er aber erst viel später. LEIBNIZ entwickelte im Oktober 1675 die Grundideen seines Infinitesimalkalküls und begann 1682 mit der Publikation wichtiger Teilergebnisse. Beide Gelehrten waren sich der Bedeutung ihrer Ideen bewusst und hatten keinen Zweifel, dass sie eine neue mächtige Methode zur Behandlung zahlreicher Probleme gefunden hatten, aber sie ahnten wohl kaum, welch gewaltiges mathematisches Gebäude sie begründet hatten. Kühn schritten sie und ihre Zeitgenossen vorwärts und eröffneten mit der Differential- und Integralrechnung, der Reihenlehre, der Lösung von Differentialgleichungen und der Variationsrechnung wichtige Teilgebiete der Analysis, doch die Fundamente des Gebäudes blieben trotz großer Bemühungen vieler Mathematiker noch sehr schwach. Nachdem L. EULER (1707–1781) dem Kalkül in meisterhaften Lehrbüchern eine erste systematische Darstellung gegeben hatte, sollte diese logisch einwandfreie Begründung den Mathematikern des 19. Jahrhunderts um A. L. CAUCHY (1789–1857), P. G. L. DIRICHLET (1805–1859), B. RIEMANN (1826–1866) und K. WEIERSTRASS (1815–1897) vorbehalten bleiben, die zugleich noch mehrere grundlegende Erweiterungen vornahmen. Beispielsweise erfuhr die Analysis dadurch eine immense Bereicherung, dass man bei den variablen Größen statt der reellen Zahlen komplexe Zahlen betrachtete.

Mit dem Ausbau der Analysis, der sich auch im 20. Jahrhundert fortsetzte, waren immer wieder neue Anwendungsmöglichkeiten und die Lösung von Fragen verbunden, die sich aus der Entwicklung der Naturwissenschaften und Technik herauskristallisiert hatten. Entscheidend war die durch die exakte Definition der Grundbegriffe, wie Funktion, Grenzwert, Stetigkeit usw., geschaffene sichere Basis der Theorie, von der in den folgenden Kapiteln wichtige Elemente näher erläutert werden sollen.

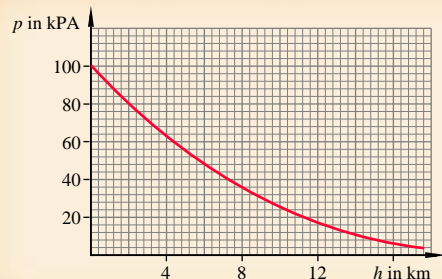
A Funktionen

Bereits in dem einleitenden Abschnitt wurde der Funktionsbegriff als ein zentraler Begriff der Analysis gekennzeichnet und seine Bedeutung für die gesamte Mathematik hervorgehoben. Auch bei der Anwendung der Mathematik in den Naturwissenschaften, in der Technik, Wirtschaft und Gesellschaft spielt der Funktionsbegriff eine wichtige Rolle. Am Anfang steht dabei meist die übersichtliche, komprimierte und auf Wesentliches konzentrierte Beschreibung bestimmter funktionaler Zusammenhänge und Abhängigkeiten, wobei hierfür vor allem Gleichungen, Tabellen, grafische Darstellungen oder auch umgangssprachliche Darstellungen genutzt werden. Einige Beispiele bzw. Aufgaben sollen dies illustrieren.

(1) Wasser besitzt die Fähigkeit, auch gasförmige Stoffe, z. B. Sauerstoff, Kohlenstoffdioxid, Schwefeldioxid oder Chlor, lösen zu können. Praktisch bedeutsam ist diese Lösefähigkeit u. a. für die Atmung der Fische: Reicht in einem Gewässer der von Fischen benötigte Sauerstoff nicht aus, so kann es auch ohne Verschmutzung zum Fischsterben kommen. Die Löslichkeit von Sauerstoff im Wasser ist temperaturabhängig, wie die nebenstehende Tabelle zeigt.

Temperatur in °C	Sauerstoff in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$
0	14,16
4	12,70
8	11,47
12	10,43
16	9,56
20	8,84
24	8,25
28	7,75

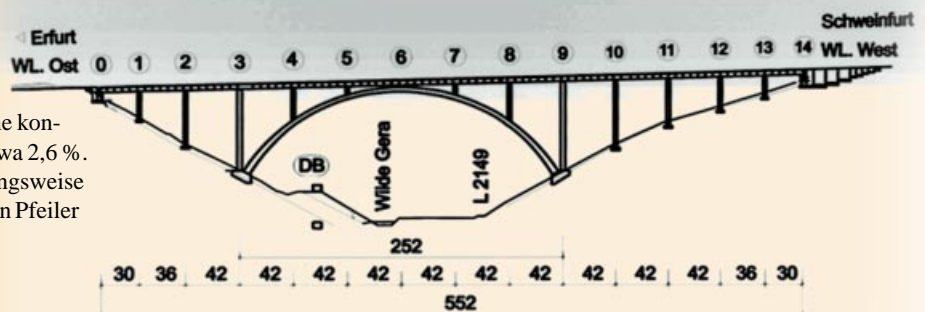
(2) Die Siedetemperatur von Wasser hängt vom Luftdruck ab. Ist der Druck höher oder geringer als der normale Luftdruck, so ist auch die Siedetemperatur höher bzw. geringer als 100 °C. Erstes macht man sich bei Schnellkochtöpfen zu Nutze. Beispielsweise beträgt bei einem Druck von 130 kPa die Siedetemperatur des Wassers 108 °C, bei 180 kPa schon 117 °C. Der zweite Sachverhalt ist die Ursache dafür, dass Wasser auf dem Montblanc (4807 m), auf dem der Luftdruck nur noch 55 % des normalen Werts beträgt, bereits bei 85 °C siedet.



(3) Ein Kondensator möge in 3 s eine Ladung von 2 C aufnehmen und sich durch eine geeignete Schaltung dann (praktisch „schlagartig“) entladen, wonach der gleiche Prozess wieder beginnt. Man stelle diesen Sachverhalt grafisch dar und beschreibe ihn durch eine geeignete Gleichung (s. Beispiel A 18).

(4) Das Verkehrsprojekt *Deutsche Einheit* sieht den Bau einer Autobahn durch den Thüringer Wald vor, die dessen Kamm von Ilmenau nach Zella-Mehlis quert. Unmittelbar vor dem Rennsteigtunnel als der Hauptkamm-durchquerung wird die Autobahn durch die größte Bogenbrücke Deutschlands über das Tal der Wilden Gera geführt. Die Bogen Spannweite beträgt 252 m (Bauwerksgesamtlänge 552 m), wobei im Bogenbereich 6 Pfeiler im Abstand von jeweils 42 m die Fahrbahn tragen (s. Fig.). Die Brücke erhebt sich etwa 110 m über dem Talgrund, der Beginn des Bogens und der Fußpunkt der äußersten Pfeiler liege rd. 38,5 m über dem Talgrund. Die Stärke des Bogens

verringert sich von 5,5 m an den Widerlagern auf 3,3 m im höchsten Punkt. Die Autobahn besitzt von Osten nach Westen eine konstante Steigung von etwa 2,6 %. Man berechne näherungsweise die Länge der äußersten Pfeiler im Bogenbereich (s. Beispiel D 13).



A 1 Der Begriff Funktion

In der Kinematik, einem Teilgebiet der Physik, werden Bewegungsvorgänge untersucht und beschrieben. Für den freien Fall, einem Sonderfall der geradlinigen, gleichmäßig beschleunigten Bewegung, entdeckte bereits GALILEI im Jahre 1604 das so genannte *Fallgesetz* $s = \frac{g}{2}t^2$.

Dieses Fallgesetz bringt einen Zusammenhang zwischen dem Fallweg s und der Fallzeit t zum Ausdruck, gilt allerdings streng genommen in dieser Form nur für das Vakuum.

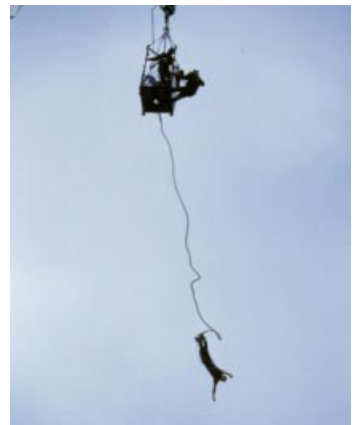
Nimmt man vereinfachend an, dass ein Bungee-Jumping-Springer in der ersten Phase nach seinem Absprung „frei fällt“, so würde er nach diesem Gesetz (bei Berechnung mit $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) in 1 s rd. 5 m, in 2 s rd. 20 m, in 3 s etwa 45 m fallen. Allgemein gilt: Hat das Gummiseil eine Länge s , so wäre der freie Fall allerdings bereits nach $t_f = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ beendet und die bremsende Wirkung des Seils käme zu Geltung. Der Springer hätte zum Zeitpunkt t_f eine Geschwindigkeit $v_f = g \cdot t_f$. Nehmen wir an, das Gummiseil würde eine Verzögerung b bewirken, so erreichte der Springer nach $t_t = \frac{v_f}{|b|}$, also

$$\text{nach } s_t = \left| \frac{b}{2} \right| t_t^2 = \left| \frac{b}{2} \right| \left(\frac{v_f}{|b|} \right)^2 = \left| \frac{b}{2} \right| \left(g \cdot \frac{t_f}{|b|} \right)^2 = \left| \frac{b}{2} \right| \cdot g^2 \cdot \frac{\frac{2s}{g}}{b^2} = \frac{g \cdot s}{|b|}$$

weiterem „Sturz“ den tiefsten Punkt. Für die Gesamthöhe H

würde demzufolge gelten: $H = s + s_t = s + \frac{g}{|b|} \cdot s$. Daraus folgt für die erforderliche Seillänge $s(H) = \frac{|b|}{|b| + g} \cdot H$. Jedem Wert der Höhe H wird auf diese Weise (bei gegebenem Materialparameter b) eine Höchstseillänge s zugeordnet.

Wenn zwischen den Elementen zweier Mengen (in unserem Beispiel also die Menge der Höhen-Maßzahlen und die Menge der Seillängen-Maßzahlen) eine *eindeutige Zuordnung* besteht, dann spricht man in der Mathematik von einer Funktion.



A 1

Definition A 1:

Unter einer **Funktion** f versteht man eine eindeutige Zuordnung. Dabei wird jedem $x \in D_f$ genau ein $y \in W_f$ zugeordnet.

Man nennt

D_f den *Definitionsbereich* oder die *Definitionsmenge* der Funktion f ,

W_f den *Wertebereich* oder die *Wertemenge* der Funktion f .

In Kurzform: $f: x \mapsto y$ oder $f: x \mapsto f(x)$.

Durch die Angabe der *Zuordnungsvorschrift* und des *Definitionsbereichs* wird eine Funktion vollständig und korrekt gekennzeichnet. Hat die Zuordnungsvorschrift die Form einer Gleichung $y = f(x)$, so nennt man $y = f(x)$ die *Funktionsgleichung* und $f(x)$ den *Funktionsterm*.

In der Analysis beschäftigt man sich ausschließlich mit Funktionen, bei denen der Definitions- und Wertebereich Mengen reeller Zahlen sind. Man spricht in diesem Fall von **reellen Funktionen**.¹⁾

Für die Darstellung von Funktionen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Mit Bezug auf ein Beispiel sind die wichtigsten nachfolgend zusammengestellt.

a) Wortvorschrift (verbale Beschreibung) Jeder reellen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet.

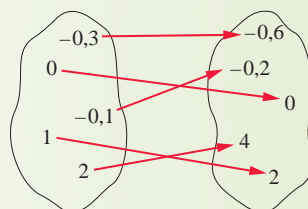
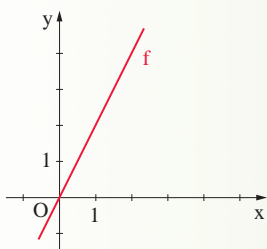
b) Funktionsgleichung $y = 2 \cdot x$ oder $f(x) = 2 \cdot x$ oder $y = f(x) = 2 \cdot x$ oder $f: x \mapsto 2x$, jeweils $x \in \mathbb{R}$

c) Wertetabelle

x	-0,3	-0,1	0	0,1	0,5	0,7	1	2	...
y	-0,6	-0,2	0	0,2	1	1,4	2	4	...

d) grafische Darstellung (im rechtwinkligen Koordinatensystem)/Graph der Funktion

e) Pfeildarstellung bzw. Pfeildiagramm



An dieser Stelle sei Folgendes vereinbart

- Die eigentlich notwendige umfangreiche Formulierung „Die Funktion f mit der Zuordnungsvorschrift/Gleichung $x \mapsto f(x) = \dots$ bzw. $y = f(x) = \dots$ und dem Definitionsbereich $D_f = \dots$ “ wollen wir bei Betrachtungen zu Funktionen in diesem Buch in der Regel durch die Kurzform „Die Funktion $f \dots$ “ oder „Die Funktion $y = f(x) = \dots$ “ oder „Die Funktion $f(x) = \dots$ “ ersetzen. Die Achse, in deren Richtung die Funktionswerte $f(x)$ abgetragen sind, wird in der Regel mit y bezeichnet.
- Da vielfach der Definitionsbereich die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen ist, erfolgt in der Regel nur dann eine gesonderte Aussage über D_f , wenn gegenüber \mathbb{R} eine Einschränkung erfolgen soll bzw. muss.

Im Unterschied zur Beschreibung mittels einer *Funktionsgleichung* wird eine reelle Funktion durch die restlichen Darstellungsformen oft nur unvollständig gekennzeichnet. Die *verbale Beschreibung* oder *Wortvorschrift* findet vor allem immer dann Anwendung, wenn sich die Zuordnung nicht oder nur sehr schwer bzw. umständlich durch eine Gleichung ausdrücken lässt. Die Zuordnung der Schüler einer Klasse zu ihrem Geburtsdatum wäre ein Beispiel für den Fall, dass sich keine Zuordnungsvorschrift in Form einer Gleichung angeben lässt.

¹⁾ Treten in Anwendungsbeispielen dennoch gelegentlich Größen auf, so werden in der Regel nur die Maßzahlen dieser Größen betrachtet.

A 2 Rationale Funktionen

A 2.1 Arten rationaler Funktionen

Je nachdem, ob bei der Verknüpfung der Funktionsvariablen nur *rationale* Rechenoperationen (also die Grundrechenarten) oder darüber hinaus noch weitere Rechenoperationen vorkommen, unterscheidet man **rationale Funktionen** und **nichtrationale Funktionen**. Die rationalen Funktionen werden noch einmal unterteilt in **ganzrationale Funktionen** und **gebrochenrationale Funktionen**.

Als ganzrationale Funktion n-ten Grades (Polynom) bezeichnet man eine Funktion f , die durch eine Gleichung der Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ dargestellt werden kann. Die Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sind reelle Zahlen mit $a_n \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Der Definitionsbereich ganzrationaler Funktionen ist \mathbb{R} , falls nicht ausdrücklich eine Einschränkung vorgenommen worden ist. Spezielle ganzrationale Funktionen wurden bereits im früheren Unterricht betrachtet. Erinnert sei an

- lineare Funktionen mit der Gleichung $f(x) = a_1 x + a_0$ (ganzrationale Funktionen 1. Grades)
- quadratische Funktionen mit der Gleichung $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (ganzrationale Funktion 2. Grades)
- Potenzfunktionen $f(x) = a_n x^n$ (spezielle ganzrationale Funktionen n-ten Grades)

Lässt sich eine Funktion als Quotient zweier ganzrationaler Funktionen darstellen, so wird sie als gebrochenrationale Funktion bezeichnet. Die Gleichung einer gebrochenrationalen Funktion f hat

demzufolge die Form $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0}$ und ist nur für solche reellen Zahlen x definiert, für die $v(x) \neq 0$ ist.

ganzrationale Funktionen	max. D_f	gebrochenrationale Funktionen	max. D_f
$f(x) = 4x^2 + x - \frac{3}{2}$	\mathbb{R}	$f(x) = \frac{1}{x-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$	\mathbb{R}	$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$
$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$	\mathbb{R}	$f(x) = \frac{x^5 - 9x^3}{x^3 - 7x^2 + 6x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0; 1; 6\}$

Für die Untersuchung von Funktionen durch das Anfertigen und Interpretieren der zugehörigen Graphen sind deren Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und ihr Symmetrieverhalten von besonderem Interesse.

A 2.2 Nullstellen und Symmetrieverhalten

Es sei S_x ein Schnittpunkt des Graphen einer Funktion mit der x -Achse. Seine Koordinaten sind dann $(x_0; 0)$.

A 2

Definition A 2:

Eine Zahl $x_0 \in D_f$ heißt genau dann **Nullstelle von f** , wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

Eine Funktion kann genau eine, mehrere oder keine Nullstelle(n) bzw. Schnittpunkte mit der x -Achse haben. Aufgrund der für eine Funktion notwendigen eindeutigen Zuordnung existiert im Unterschied

dazu nur (höchstens) ein Schnittpunkt des Graphen einer Funktion f mit der y -Achse. Seine Koordinaten sind dann $(0; y_s)$. Der Funktionswert y_s an der Stelle $x_s = 0$ hat keinen besonderen Namen. Hervorgehoben sei: Die *Nullstelle einer Funktion* und der *Schnittpunkt ihres Graphen mit der x -Achse* dürfen *nicht miteinander verwechselt* werden: Die *Nullstelle* ist ein Element (eine reelle Zahl) aus dem Definitionsbereich der Funktion, und zwar (nur) die x -Koordinate bzw. der Abszissenwert des Schnittpunktes des Funktionsgraphen mit der x -Achse. Dieser *Schnittpunkt* hingegen wird erst durch ein *Zahlenpaar* vollständig beschrieben, wobei die 2. Koordinate hier jeweils null ist.

Die obige Definition der Nullstelle einer Funktion gibt uns ein Mittel in die Hand, für eine gegebene Zahl x_0 und eine gegebene Funktion f zu *prüfen*, ob diese Zahl Nullstelle der Funktion ist. Dazu wird die Zahl als Argument in die Funktionsgleichung eingesetzt und der Funktionswert berechnet. Ist dieser gleich 0, gilt also $f(x_0) = 0$, so ist die Zahl x_0 eine Nullstelle der Funktion f .

Um eine Nullstelle zu *finden*, muss dagegen die Gleichung $f(x) = 0$ *gelöst* werden. Bei vielen Funktionen reichen hierzu die Kenntnisse über das Lösen von linearen bzw. quadratischen Gleichungen allerdings nicht aus. In solchen Fällen macht man sich entweder den Zusammenhang Nullstelle/Schnittpunkt mit der x -Achse zunutze oder bedient sich zur Nullstellenermittlung besonderer *numerischer Verfahren*. Die Nullstellenermittlung für rationale (insbesondere ganzrationale) Funktionen soll nachfolgend mit Bezug auf früher erworbene Kenntnisse genauer betrachtet werden. Einmal gibt es hierfür ein überschaubares theoretisches Instrumentarium, und zum anderen lassen sich die meisten nicht rationalen Funktionen (s. Abschnitt A 3) „hinreichend gut“ durch ganzrationale Funktionen beschreiben (s. auch Abschnitt F 1). Das heißt: Kann man eine Nullstelle einer ganzrationalen („Ersatz“-)Funktion für eine nicht rationale Funktion ermitteln, so kennt man zumindest eine Näherung für eine Nullstelle der entsprechenden nicht rationalen Funktion. Ein allgemeingültiger, sicherer und einfacher Weg zum Finden einer Nullstelle für eine beliebige Funktion f lässt sich allerdings nicht angeben.

- *Nullstellenbestimmung bei ganzrationalen Funktionen*

Beispiel A 1:

Man untersuche auf grafischem Wege, ob die Funktion $f(x) = x^3 - 6x + 1$ Nullstellen besitzt und bestimme diese dann näherungsweise.

Aus der Darstellung in Fig. A 1 kann man entnehmen, dass die Funktion f offenbar drei Nullstellen besitzt. Durch Wahl einer geeigneten ZOOM-Box lässt sich unter Verwendung von TRACE als erste Nullstelle (Fig. A 2): $x_1 \approx 0,1667$ (mit $f(x_1) \approx 0,0047$) ablesen.

Auf analoge Weise erhält man z.B.:

$x_2 \approx -2,5291$ (mit $f(x_2) \approx -0,00279$); $x_3 \approx 2,3621$ (mit $f(x_3) \approx 0,0070$)

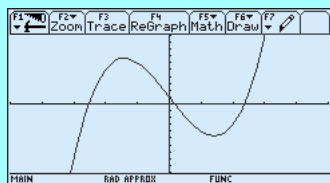


Fig. A 1

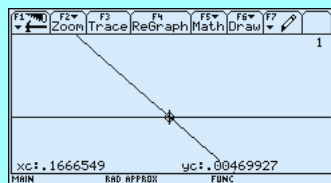


Fig. A 2

A 1

In den folgenden Beispielen sollen nun numerische Methoden gezeigt werden, die unter bestimmten Bedingungen das (ggf. näherungsweise) Auffinden von Nullstellen gestatten. Am Anfang stehen dabei die **Substitution** und die **Faktorzerlegung**.

A 2

Beispiel A 2:

Es sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ zu bestimmen.Da sowohl im ersten als auch zweiten Summanden der Funktionsgleichung x^2 enthalten ist, benutzen wir die Substitution $t = x^2$.Die substituierte Gleichung lautet $0 = t^2 - 3t - 4$.

(1) Lösen der substituierten Gleichung:

$$0 = t^2 - 3t - 4, \text{ also } t_1 = 4; t_2 = -1$$

(2) Rücktransformation:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2; \quad x^2 = -1: \text{ in } \mathbb{R} \text{ nicht lösbar}$$

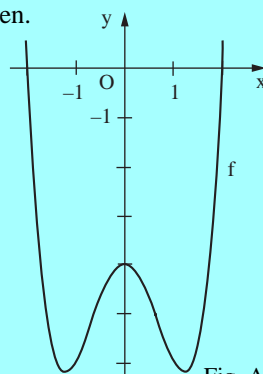
(3) Da $D_f = \mathbb{R}$, sind -2 und 2 die beiden Nullstellen der Funktion $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$.Fig. A 3 zeigt den Verlauf des Graphen von f .

Fig. A 3

Fig. A 3 lässt noch eine weitere markante Eigenschaft des Graphen erkennen: Er ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Dies führt zu der folgenden Begriffsfestlegung:

A 3

Definition A 3:

Eine Funktion f heißt genau dann**gerade Funktion,****ungerade Funktion,**wenn mit $x \in D_f$ stets auch $-x \in D_f$ und wenn gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

$$f(-x) = -f(x).$$

Der Graph einer geraden Funktion ist *achsensymmetrisch zur y-Achse*. Der Graph einer ungeraden Funktion ist *punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung*.

$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ (s. Beispiel A 2) ist demzufolge eine gerade Funktion. In der Tat gilt:

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 4 = x^4 - 3x^2 - 4 = f(x).$$

Die Anwendung der *Faktorzerlegung* zur Nullstellenbestimmung hat zur Voraussetzung, dass die betreffende Funktion f so in ein Produkt von Funktionen f_1 und f_2 zerlegt werden kann, dass gilt $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$. Für die Nullstellenbestimmung folgt dann $0 = f_1(x) \cdot f_2(x)$.

Da ein Produkt reeller Zahlen genau dann gleich 0 ist, wenn einer der Faktoren den Wert 0 hat, ergibt sich: $f(x) = 0$ genau dann, wenn $f_1(x) = 0$ oder $f_2(x) = 0$. Zumindest eine der beiden Gleichungen $f_1(x) = 0$ oder $f_2(x) = 0$ ist nun oft einfacher zu lösen als die Ausgangsgleichung $f(x) = 0$:

A 3

Beispiel A 3:

Es sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^4 + 1,5x^3 - x^2$ zu bestimmen.Durch Ausklammern erhält man: $f(x) = x^2 \cdot (x^2 + 1,5x - 1) = f_1(x) \cdot f_2(x)$

$$f_1(x) = x^2 = 0 \text{ ergibt } x_1 = 0;$$

$$f_2(x) = x^2 + 1,5x - 1 = 0 \text{ ergibt } x_2 = \frac{1}{2} \text{ und } x_3 = -2.$$

Wie man bereits aus dem Graphen entnehmen kann, ist die Funktion f weder gerade noch ungerade. Die Rechnung bestätigt dies:

$$f(-x) = (-x)^4 + 1,5(-x)^3 - (-x)^2 = x^4 - 1,5x^3 - x^2, \text{ also verschieden von } f(x) \text{ und auch verschieden von } -f(x).$$

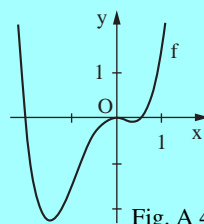


Fig. A 4

Um Nullstellen der Funktion $f(x) = 4x^2 + x - \frac{3}{2}$ zu bestimmen, muss die Gleichung $0 = 4 \cdot x^2 + x - \frac{3}{2} = 4 \cdot (x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8})$ gelöst werden. Da das Produkt auf der rechten Seite nur dann gleich 0 werden kann, wenn der Faktor $(x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8})$ gleich 0 ist, gilt $0 = x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}$. Diese Gleichung besitzt die Lösungen $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = -\frac{3}{4}$; x_1 und x_2 sind also die Nullstellen der untersuchten Funktion.

Allgemein gilt: Die Nullstellen einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ stimmen wegen $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$ mit den Nullstellen der Funktion $q(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ überein. Man braucht also nur die Gleichung $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ zu lösen, um die Nullstellen von f zu erhalten. Andererseits ist von der Herleitung der Lösungsformel und des VIETASchen Wurzelsatzes folgende Aussage bekannt:

Sind x_1 und x_2 Nullstellen von $f(x) = ax^2 + bx + c$, so gilt $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Auf diese Weise lässt sich eine quadratische Funktion f , die Nullstellen besitzt, stets in ein Produkt umformen. Für obiges Beispiel gilt: $f(x) = 4x^2 + x - \frac{3}{2} = 4 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x + \frac{3}{4})$.

Terme der Form $(x - k)$ werden **Linearfaktoren** genannt. Den Übergang von beispielsweise $f(x) = 4x^2 + x - \frac{3}{2}$ zu $f(x) = 4 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x + \frac{3}{4})$ bezeichnet man demzufolge als **Linearfaktorzerlegung** der Ausgangsfunktion. Liegt umgekehrt eine ganzrationale Funktion in Linearfaktoren zerlegt vor, z. B. $f(x) = a \cdot (x - k_1) \cdot (x - k_2)$ mit $a \neq 0$, so lassen sich die Nullstellen der Funktion direkt ablesen: Der Funktionswert wird nämlich genau dann 0, wenn (mindestens) einer der Faktoren den Wert 0 annimmt. Aus $x - k_1 = 0$ folgt also $x_1 = k_1$ für die erste Nullstelle, während sich aus $x - k_2 = 0$ die zweite Nullstelle $x_2 = k_2$ ergibt.

Von der in Linearfaktoren zerlegten Funktion gelangt man durch Ausmultiplizieren zur normalen Form – zum Polynom – zurück:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = a \cdot (x^2 + (-x_1 - x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2) = a \cdot (x^2 + p \cdot x + q)$$

mit $p = -x_1 - x_2$ und $q = x_1 \cdot x_2$

Die für quadratische Funktionen gefundene Zerlegung in Faktoren lässt sich auf ganzrationale Funktionen n -ten Grades erweitern, was an dieser Stelle ohne Beweis erfolgen soll:

Satz A 1: Abspalten von Linearfaktoren

Ist x_0 eine Nullstelle einer ganzrationalen Funktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, n \geq 1, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ und } a_n \neq 0,$$

so kann $f(x)$ in ein Produkt $f(x) = (x - x_0) \cdot f_R(x)$

aus dem Linearfaktor $(x - x_0)$ und der Restfunktion f_R zerlegt werden, wobei f_R eine ganzrationale Funktion vom Grade $(n - 1)$ ist.

A 1

Aus Satz A 1 ergibt sich als wichtige Folgerung: Eine ganzrationale Funktion n -ten Grades kann im Bereich der reellen Zahlen **höchstens n Nullstellen** besitzen (vgl. Satz F 1). Für den Fall, dass eine solche Funktion **genau n reelle Nullstellen** x_1, x_2, \dots, x_n besitzt, lässt sie sich ausschließlich als Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Die Linearfaktorzerlegung kann bei der Nullstellenbestimmung ganzrationaler Funktionen höheren als 2. Grades angewendet werden. Wenn es nämlich gelingt, eine Nullstelle x_0 zu ermitteln – sei es durch Probieren¹⁾ oder durch eine grafische Darstellung (etwa mithilfe eines GTA) –, so kann nach Satz A 1 die Restfunktion f_R bestimmt werden: $f_R(x) = f(x) : (x - x_0)$

Da der Grad von f_R gegenüber dem der Ausgangsfunktion um eins niedriger ist, lässt sich $f_R(x)$ oft einfacher bearbeiten.

Zur Berechnung von f_R ist eine **Polynomdivision** erforderlich, die in Analogie zum schriftlichen Dividieren bei ganzen Zahlen durchgeführt wird. Dabei wird vorausgesetzt, dass sowohl Dividend als auch Divisor nach fallenden Potenzen der Variablen – in unserem Falle x – geordnet sind. Die Division erfolgt nach folgendem Algorithmus:

- (1) Der erste Summand des aktuellen Dividenten (beim ersten Durchlauf der Schrittfolge ist das der Term $f(x)$) wird durch den ersten Summanden des Divisors dividiert.
- (2) Das dabei entstehende Ergebnis wird zum bestehenden Ergebnis (beim ersten Durchlauf der Schrittfolge ist das 0) addiert.
- (3) Der soeben zum Ergebnis addierte Summand wird mit dem Divisor multipliziert, das Produkt vom aktuellen Dividenten subtrahiert.
- (4) Ist der Grad der jetzt erhaltenen Differenz größer oder gleich dem Grad des Divisors, so ist die Differenz der neue aktuelle Divident und man setzt beim ersten Schritt fort.
- (5) Ist der Grad der im Schritt (3) erhaltenen Differenz kleiner als der Grad des Divisors, so ist die Aufgabe beendet. Ist die Differenz gleich null, so ist der Divident durch den Divisor teilbar, das Ergebnis ist der Quotient. Anderenfalls ist die Differenz der Rest bei der Division.

A 4

Beispiel A 4:

$$\begin{array}{l} \text{a) } (x^3 - 6x^2 + 12x - 9) : (x - 3) = x^2 - 3x + 3 \\ \quad \underline{-(x^3 - 3x^2)} \\ \quad \quad -3x^2 + 12x - 9 \\ \quad \quad \underline{-(-3x^2 + 9x)} \\ \quad \quad \quad 3x - 9 \\ \quad \quad \quad \underline{-(3x - 9)} \\ \quad \quad \quad \quad 0 \end{array} \quad \text{b) } (x^3 + 2x^2 + 2x + 7) : (x^2 + 1) = x + 2 + \frac{x+5}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{r} \\ \underline{-(x^3)} \\ 2x^2 + x + 7 \\ \underline{-(2x^2)} \\ x + 5 \\ \text{Rest: } x + 5 \end{array}$$

Aus dem Algorithmus ergibt sich, dass das Ergebnis einer Polynomdivision immer einen ganzrationalen Anteil besitzt. Dieser wird schrittweise entsprechend der angegebenen Vorschrift aufgebaut. Schritt

(4) sichert, dass der Aufbau des ganzzahligen Anteils so lange fortgesetzt wird, wie der Grad des momentanen Rests (aktueller Divident) größer als der Grad des Divisors oder diesem gleich ist. Ein am Ende des Algorithmus verbleibender Rest muss also einen kleineren Grad als der Divisor haben.

Setzt man einen GTA für die obige Polynomdivision ein, so erhält man das Resultat in der Form von Fig. A 5:

Fig. A 5

¹⁾ Ist f eine ganzrationale Funktion und sind alle Koeffizienten ganzzahlig, sollte beim Probieren mit den Teilern des Absolutgliedes begonnen werden.

Beispiel A 5:

Es sind die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ zu bestimmen.

Die zu lösende Gleichung $x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = 0$ besitzt den Grad 3. Eine Lösungsformel für Gleichungen 3. sowie 4. Grades existiert zwar, kann aber hier nicht behandelt werden. Wenn es jedoch gelingt, eine Nullstelle zu ermitteln, so ist es möglich, nach Satz A 1 die Restfunktion f_R zu bestimmen. f_R ist eine Funktion 2. Grades, deren Nullstellen sich somit nach der Lösungsformel berechnen lassen.

Da die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = 0$ nur ganzzahlige Koeffizienten besitzt, sollte beim Lösen durch Probieren mit den Teilern des Absolutglieds begonnen werden. Man ermittelt auf diese Weise $x_0 = 3$ als eine Nullstelle von f .

Nach Satz A 1 gilt deshalb: $x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = (x - 3) \cdot f_R$.

f_R kann ermittelt werden, wenn man das Polynom $x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ durch das Polynom $f_D = x - 3$ dividiert. Man erhält $f_R = x^2 - 3x + 3$ (vgl. Beispiel A 4).

Damit gilt: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = (x - 3) \cdot (x^2 - 3x + 3)$

Weitere Nullstellen der Funktion f können also nur durch den Faktor $x^2 - 3x + 3$ zustande kommen. Da aber $x^2 - 3x + 3 = 0$ keine Lösungen besitzt, ist $x_0 = 3$ die einzige Nullstelle der Funktion f (Fig. A 6).

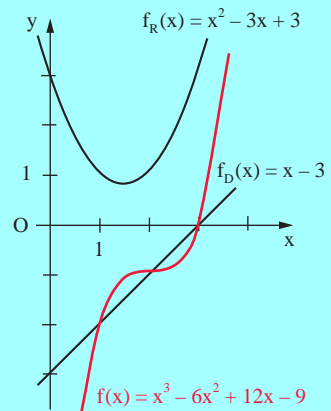


Fig. A 6

Bei Einsatz eines GTA verringert sich der Aufwand beträchtlich. Der Bildschirmanzeige kann man mittels **Trace** sofort entnehmen, dass $x_0 = 3$ die einzige Nullstelle ist. Neben diesem Weg unter Verwendung von **Trace**, der für die Bestimmung von Punktkoordinaten stets einsetzbar ist, kann man im **GRAPH**-Menü auch den speziellen Befehl **Zero** zur Nullstellenbestimmung nutzen. Hierbei ist eine untere und eine obere Grenze (**Lower Bound** bzw. **Upper Bound**) einzugeben (Fig. A 7a-c)

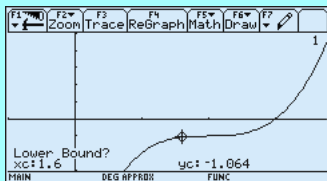


Fig. A 7a

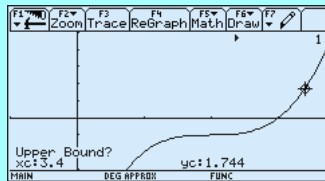


Fig. A 7b

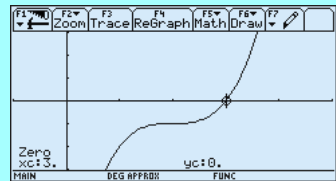


Fig. A 7c

- Nullstellenbestimmung bei gebrochenrationalen Funktionen**

Die Nullstellenbestimmung bei **gebrochenrationalen Funktionen** wird auf die Nullstellenbestimmung ganzrationaler Funktionen zurückgeführt.

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ (mit $v(x) \neq 0$) lässt sich in zwei Faktoren zerlegen: $f(x) = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$. Zur Nullstellenbestimmung ist also die Gleichung $u(x) \cdot \frac{1}{v(x)} = 0$ zu lösen.

Der zweite Faktor kann für endliche Werte $v(x)$ nicht 0 werden. Demzufolge ist das Produkt nur dann gleich 0, wenn der Faktor $u(x)$, also die Zählerfunktion, den Wert 0 annimmt. *Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion* sind deshalb alle *Nullstellen der Zählerfunktion*, die nicht auch Nullstellen der Nennerfunktion sind. Also:

x_0 ist eine Nullstelle der Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, wenn $u(x_0) = 0$ und $v(x_0) \neq 0$.

A 6 Beispiel A 6:

Man ermittle die Nullstellen der Funktion $f(x) = \frac{(x-1)}{(x^2-2x-3)}$ und überprüfe die rechnerisch erhaltenen Resultate anhand der Darstellung des Graphen von f .

Die Zählerfunktion $u(x) = x - 1$ besitzt die Nullstelle $x_1 = 1$, die Nennerfunktion $v(x) = x^2 - 2x - 3$ hat die Nullstellen $x_2 = -1$ und $x_2 = 3$. Da $v(1) \neq 0$, ist $x_1 = 1$ auch Nullstelle von f . Fig. A 8 bestätigt die Rechnung.

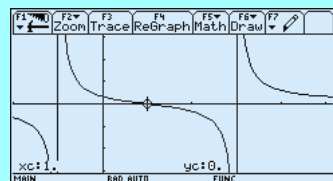


Fig. A 8

A 7 Beispiel A 7:

$$\text{Die Funktion } f(x) = \frac{x^5 - 9x^3}{x^3 - 7x - 6} = \frac{x^3 \cdot (x-3) \cdot (x+3)}{(x-3) \cdot (x+1) \cdot (x+2)}$$

besitzt die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -3$. Die Zahl 3 ist zwar Nullstelle der Zählerfunktion, da sie aber auch Nullstelle der Nennerfunktion ist, gehört sie nicht zum Definitionsbereich der betrachteten gebrochenrationalen Funktion. Für die Zähler- und Nennerfunktion wurde hier jeweils die Linearfaktorzerlegung verwendet.

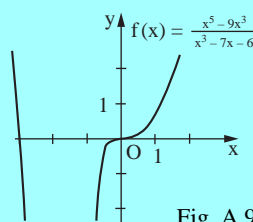


Fig. A 9

Bei der Untersuchung von Funktionen stellt man fest, dass der Definitionsbereich einer Funktion nicht immer die (gesamte) Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen ist.

A 8 Beispiel A 8:

Wir betrachten die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ (vgl. Fig. A 10). Während der (maximale) Definitionsbereich D_f von f die Menge \mathbb{R} ist, muss man für g fordern, dass x von null verschieden ist, also $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Funktion g ist an der Stelle 0 nicht definiert.

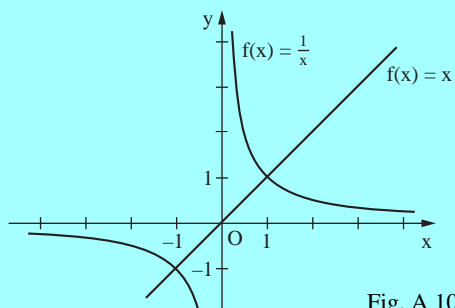


Fig. A 10

Solche nicht definierten Stellen werden als **Definitionslücken** einer Funktion bezeichnet.

Im Unterschied zu ganzrationalen Funktionen, die in der Regel keine Definitionslücken besitzen, sind gebrochenrationale Funktionen an all den Stellen nicht definiert, wo die Nennerfunktion den Wert 0 annimmt. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall (1): Die Nennerfunktion ist an einer bestimmten Stelle gleich 0, die Zählerfunktion ungleich 0.

A 9 Beispiel A 9:

Bei der Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ ist für $x_0 = 2$ die Nennerfunktion gleich 0 – die Funktion f besitzt hier eine Definitionslücke. Die Zählerfunktion an der Stelle $x_0 = 2$ ist jedoch ungleich 0. Eine solche Stelle nennt man **Polstelle** der Funktion f .

Definition A 4:

x_0 heißt **Polstelle** der Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, wenn $v(x_0) = 0$ und $u(x_0) \neq 0$ ist.

A 4

Beispiel A 10:

a) Die Funktion $f(x) = \frac{2}{x-2}$ besitzt an der Stelle $x_0 = 2$ einen Pol (Fig. A 11). Die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ ist die so genannte **Polgerade**. Die beiden „Äste“ des Graphen von f liegen auf verschiedenen Seiten der Abszissenachse. Man sagt: Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 2$ einen **Pol mit Vorzeichenwechsel**.

b) Die Funktion $g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ hat an der Stelle $x_0 = 2$ ebenfalls eine Polstelle (Fig. A 12). Auch hier ist $x = 2$ eine Polgerade, die beiden „Äste“ des Graphen von f liegen aber auf derselben Seite der Abszissenachse. Man sagt: Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 2$ einen **Pol ohne Vorzeichenwechsel**.

A 10

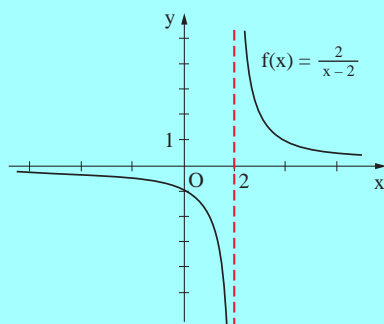


Fig. A 11

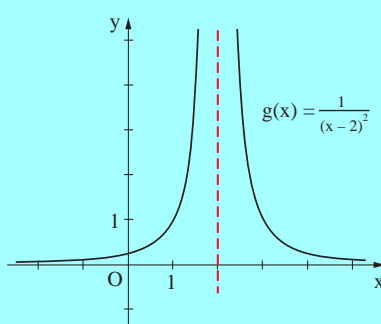


Fig. A 12

Fall (2): Sowohl Nennerfunktion als auch Zählerfunktion sind an einer bestimmten Stelle gleich 0.

Beispiel A 11:

Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ hat an der Stelle $x_0 = -1$ eine Definitionslücke (Fig. A 13), die keine Polstelle ist. Der Funktionsgraph mündet von links und von rechts in das „Loch“ beim Punkt $P(-1; -2)$. Kürzt man im Funktionsterm den Linearfaktor $(x + 1)$ heraus, so ergibt sich eine neue Funktion $g(x) = x - 1$ mit $D_g = \mathbb{R}$. Man sagt auch: Die Stelle $x_0 = -1$ ist eine **hebbare Definitionslücke** der Funktion f (s. auch Abschnitt D 5.5).

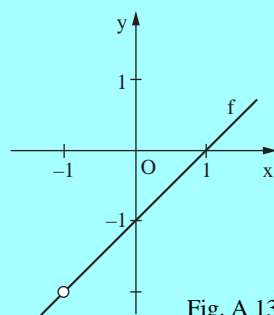


Fig. A 13

Wird der Graph einer solchen Funktion auf dem Bildschirm eines GTA dargestellt, so erhält man in Abhängigkeit von der aktuellen Window-Einstellung u. U. unterschiedliche Bilder. Fig. A 14 lässt das „Loch“ im Graphen von f erkennen; beim „Abfahren“ mit **TRACE** wird außerdem für $x_c = -1$ kein y -Wert angegeben.

(Hier wurde $x_{\min} = -3$, $x_{\max} = 2,95$, $y_{\min} = -3$ und $y_{\max} = 2,1$ – ausgehend von ZoomDec des Zoom-Menüs – gewählt. Andere Window-Einstellungen zeigen u. U. das „Loch“ im Graphen nicht.)

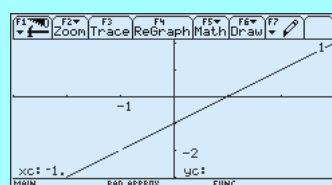


Fig. A 14

A 11

A 3 Nichtrationale Funktionen und ihre Nullstellen

Zu den nichtrationalen (reellen) Funktionen zählen neben den im bisherigen Unterricht bereits untersuchten Wurzelfunktionen und trigonometrischen Funktionen weiterhin die Exponential- und Logarithmusfunktionen.

A 3.1 Exponentialfunktionen

Zur Förderung von Gärungsprozessen (z.B. bei der Weinherstellung) werden Hefen eingesetzt. Die Hefezellen entwickeln sich in Nährlösungen. Aus Versuchen sei bekannt, dass sich die Anzahl bestimmter Hefezellen stündlich verdreifacht. Aus 1,5 g Hefe hätte sich dann nach t Stunden folgende Hefemasse gebildet:

Zeit t in h	0	1	2	3	4	5
Masse m in g	1,5	4,5	13,5	40,5	121,5	364,5
		$\cdot 3$	$\cdot 3$	$\cdot 3$	$\cdot 3$	$\cdot 3$

Die durch diese Tabelle gegebene Funktion lässt sich durch die Gleichung $m(t) = 1,5 \cdot 3^t$, $t \in \mathbb{N}$, beschreiben. Im Unterschied zu den bekannten Potenzfunktionen erscheint hier die unabhängige Variable t im Exponenten des Funktionsterms. Derartige Funktionen werden als *Exponentialfunktionen* bezeichnet.

A 5

Definition A 5:

Funktionen mit einer Gleichung der Form $f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $a \neq 1$) heißen **Exponentialfunktionen**. Ihr Definitionsbereich ist die Menge der reellen Zahlen.

Der Fall $a = 1$ wird in obiger Definition deshalb ausgeschlossen, weil sich wegen $1^x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die bereits bekannte konstante Funktion $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ergeben würde. Da ferner $a > 0$ sein muss, sind die Funktionswerte einer Exponentialfunktion alle positiv – Exponentialfunktionen besitzen also keine Nullstellen.

Um einen Überblick über einige elementare Eigenschaften dieser Funktionen zu erhalten, zeichnen wir unter Verwendung von Wertetabellen (Werte z.T. gerundet) die Graphen der Exponentialfunktionen

$f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = 0,5^x$ und $k(x) = 10^x$ (Fig. A 15).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
3^x	0,037	0,1	0,3	1	3	9	27
$0,5^x$	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125
10^x	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000

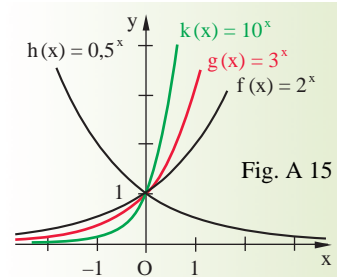


Fig. A 15

Der Anschauung entnehmen wir folgende Eigenschaften der Exponentialfunktionen:

- Ein charakteristischer Punkt ihrer Graphen ist der Schnittpunkt mit der y-Achse. Wegen $a^0 = 1$ (für $a \neq 0$) verlaufen alle diese Graphen durch den Punkt $(0; 1)$. Mit wachsendem x nähern sich die Graphen immer mehr der x-Achse.
- Jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist eineindeutig, d. h., für $x_1 \neq x_2$ gilt stets auch $f(x_1) \neq f(x_2)$.

- Falls $a > 1$, so folgt aus $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$; falls $a < 1$ und $x_1 < x_2$, so ist $f(x_1) > f(x_2)$ (vgl. Abschnitt C 1).

Ausgehend von der Fig. A 15 lässt sich vermuten, dass die Graphen von $h(x) = (\frac{1}{2})^x$ und $f(x) = 2^x$ **symmetrisch** zur y-Achse liegen. Der Beweis hierfür kann sofort in allgemeiner Form erfolgen: Wenn $h(x) = (\frac{1}{a})^x = a^{-x}$ und $f(x) = a^x$, dann ergeben sich die Funktionswerte von $h(x)$ aus denen von $f(x)$ durch Ersetzen von x durch $(-x)$. Das bedeutet aber gerade, dass die Graphen der beiden Funktionen die genannte Symmetriebeziehung bezüglich der y-Achse besitzen.

Nun sollen auch Exponentialfunktionen der Form $f(x) = c \cdot a^x$ (mit $c \neq 1$ und $c > 0$) untersucht werden. Wir zeichnen dazu unter Verwendung von Wertetabellen (Werte z.T. gerundet) die Graphen der Funktionen

$f(x) = 3 \cdot 0,2^x$, $g(x) = 0,5 \cdot 2^x$ und $h(x) = 2 \cdot 1,5^x$ (Fig. 0 2).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$3 \cdot 0,2^x$	375	75	15	3	0,6	0,12	0,024
$0,5 \cdot 2^x$	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4
$2 \cdot 1,5^x$	0,593	0,889	1,33	2	3	4,5	6,75

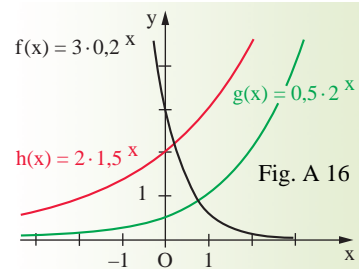


Fig. A 16

Die Exponentialfunktionen $f(x) = c \cdot a^x$ besitzen dieselben Eigenschaften wie die Funktionen $f(x) = a^x$ mit Ausnahme des Schnittpunktes ihrer Graphen mit der y-Achse, der für $f(x) = c \cdot a^x$ der Punkt $(0; c)$ ist. Der Graph der Funktion $g(x) = 0,5 \cdot 2^x$ ergibt sich aus dem Graphen der Funktion $f(x) = 2^x$ durch Stauchung in Richtung der y-Achse auf das „0,5fache“ – der Graph von $f(x) = c \cdot a^x$ aus dem von $f(x) = a^x$ entsprechend durch Streckung oder Stauchung in Richtung der y-Achse mit dem Faktor c .

Von besonderer Bedeutung für verschiedenste Bereiche von Wissenschaft und Technik ist die Exponentialfunktion, in der die **EULERSche Zahl e** als Basis auftritt ($e = 2,718281828459 \dots$). Sie wird oft auch in der Form $\exp(x) = e^x$ dargestellt.

A 3.2 Logarithmusfunktionen

Will man in der Potenz $a^c = b$ (mit $a, b, c \in \mathbb{R}$) die Basis a bestimmen, so muss man bekanntlich radizieren. Ist dagegen der Exponent c zu ermitteln, so führt dies zu einer neuen Rechenoperation, dem Logarithmieren. Man schreibt $c = \log_a b$ und versteht unter dem „*Logarithmus von b zur Basis a*“ diejenige Hochzahl (Exponent) c , mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten. Radizieren und Logarithmieren sind Umkehroperationen des Potenzierens.

Definition A 6:

Funktionen mit einer Gleichung der Form $f(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $a \neq 1$) heißen **Logarithmusfunktionen**. Ihr Definitionsbereich ist die Menge \mathbb{R}^+ der positiven reellen Zahlen.

A 6

Um wichtige Eigenschaften der Logarithmusfunktionen finden zu können, sollen wiederum die Graphen einiger Logarithmusfunktionen gezeichnet werden:

$$f(x) = \log_2 x; \quad g(x) = \log_e x = \ln x; \quad h(x) = \log_{10} x = \lg x \quad (\text{Fig. A 17})$$

Wertetabelle:

x	0,5	1	2	3	4	6	8
$\log_2 x$	-1	0	1	1,58	2	2,58	3
$\ln x$	-0,69	0	0,69	1,10	1,39	1,79	2,08
$\lg x$	-0,30	0	0,30	0,48	0,60	0,78	0,90

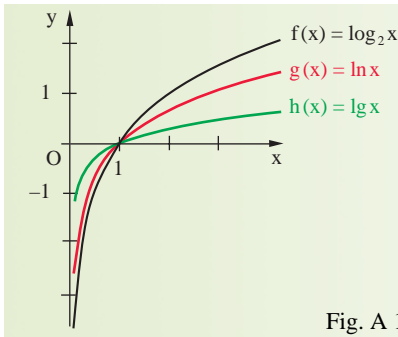


Fig. A 17

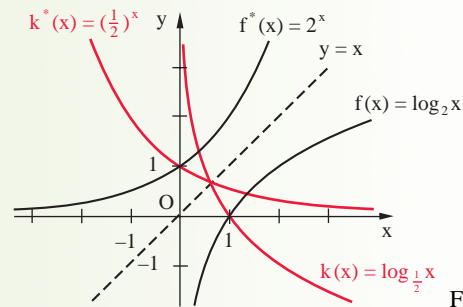


Fig. A 18

Einfacher erhält man die Graphen der Logarithmusfunktionen durch Spiegelung der Graphen der zugehörigen Exponentialfunktionen an der Geraden $y = x$ (s. hierzu Abschnitt A 5).

Mit Bezug auf die obigen Figuren A 17 und A 18 lassen sich folgende Aussagen über Eigenschaften der Logarithmusfunktionen treffen:

- Wegen $\log_a 1 = 0$ besitzen alle diese Funktionen die Nullstelle $x_0 = 1$ (und nur diese). Ihre Graphen verlaufen demzufolge durch den Punkt $(1; 0)$. Die y -Achse ist Asymptote.
- Jede Logarithmusfunktion $f(x) = \log_a x$ ist eineindeutig, d. h., für $x_1 \neq x_2$ gilt stets auch $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Für $a > 1$ folgt aus $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$; für $0 < a < 1$ und $x_1 < x_2$ ist $f(x_1) > f(x_2)$.

Logarithmusfunktionen finden ebenso wie Exponentialfunktionen in den Naturwissenschaften, der Technik und der Wirtschaft Anwendung. Von besonderer Bedeutung sind dabei die Logarithmusfunktionen mit den Basen e und 10 , weshalb diese auch spezielle Bezeichnungen tragen:

$f(x) = \log_e x = \ln x$ natürliche Logarithmusfunktion ($\ln x$: natürlicher Logarithmus von x);

$f(x) = \log_{10} x = \lg x$ dekadische Logarithmusfunktion ($\lg x$: dekadischer Logarithmus von x).

Für das *Rechnen mit Logarithmen* gelten eine Reihe von Regeln und Gesetzmäßigkeiten, die aus den Zusammenhängen zwischen Potenzieren und Logarithmieren sowie aus den Potenzgesetzen für Potenzen mit reellen Exponenten resultieren.

A 2

Satz A 2: Logarithmengesetze

Sind x und y positive reelle Zahlen und ist a eine positive reelle Zahl mit $a \neq 1$, so gilt

$$\text{a) } \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \text{b) } \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \text{c) } \log_a x^k = k \cdot \log_a x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Beweis:

Die Gültigkeit der Beziehungen folgt sofort aus der Definition des Logarithmus und den Potenzgesetzen für Potenzen mit reellen Exponenten. Wir beschränken uns hier auf den Nachweis von a):

Es sei $\log_a x = c_1$ und $\log_a y = c_2$, also $x = a^{c_1}$ und $y = a^{c_2}$.

Dann ist $x \cdot y = a^{c_1} \cdot a^{c_2} = a^{c_1 + c_2}$.

Also gilt $\log_a(x \cdot y) = \log_a a^{c_1 + c_2} = c_1 + c_2 = \log_a x + \log_a y$. w.z.b.w. (*was zu beweisen war*)¹⁾

Aus der Beziehung c) folgt speziell für das Logarithmieren von Wurzeln:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x \quad \text{bzw.} \quad \log_a \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} \log_a x \quad (n \in \mathbb{N}, n > 0, x > 0)$$

Speziell gilt: $\log_a 1 = 0$ und $\log_a a = 1$.

Beispiel A 12:

a) $\lg(6,3 \cdot 0,5) = \lg 6,3 + \lg 0,5 = 0,4983$

b) $\lg 4 + \lg 7 - \lg 14 = \lg \frac{4 \cdot 7}{14} = \lg 2 = 0,3010$

c) $\lg 16 + \lg 625 = \lg 2^4 + \lg 5^4 = 4\lg 2 + 4\lg 5 = 4(\lg 2 + \lg 5) = 4\lg(2 \cdot 5) = 4\lg 10 = 4$

d) $\ln \frac{1}{3 \cdot \sqrt{e^3}} = \ln 1 - (\ln 3 + \frac{3}{2} \ln e) = 0 - \ln 3 - \frac{3}{2} \approx -2,599$.

A 12

Zusammenhänge zwischen Logarithmen unterschiedlicher Basen

Will man Logarithmen für eine beliebige Basis a berechnen, so ist es vorteilhaft, wenn man diese Berechnung auf Logarithmen zurückführen kann, deren Werte aus Tabellen entnommen bzw. von Computern ermittelt werden können. Derartige „standardisierte“ Logarithmen sind die natürlichen Logarithmen (Basis e) und die dekadischen Logarithmen (Basis 10).

Es gilt: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$

Durch Logarithmieren der Gleichung $a^y = x$ erhält man mithilfe des

- natürlichen Logarithmus: $y \cdot \ln a = \ln x$, also $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
- dekadischen Logarithmus: $y \cdot \lg a = \lg x$, also $\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$

Für die Spezialfälle $a = 10$ und $a = e$ erhält man die Umrechnungsbeziehungen zwischen dekadischen und natürlichen Logarithmen:

$$a = 10:$$

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0,43429 \cdot \ln x,$$

$$a = e:$$

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \approx 2,30259 \cdot \lg x$$

Allgemein gilt für die Umrechnung von Logarithmen zweier unterschiedlicher Basen a_1 und a_2 :

Wegen $\log_{a_1} x = \frac{\ln x}{\ln a_1}$ und $\log_{a_2} x = \frac{\ln x}{\ln a_2}$ ergibt sich $\frac{\log_{a_1} x}{\log_{a_2} x} = \frac{\ln a_2}{\ln a_1}$ und damit

$$\log_{a_1} x = \log_{a_2} x \cdot \frac{\ln a_2}{\ln a_1}. \quad \text{Analog folgt die Beziehung } \log_{a_1} x = \log_{a_2} x \cdot \frac{\lg a_2}{\lg a_1}.$$

Das heißt also: Logarithmen verschiedener Basen unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor.

A 3.3 Nullstellen nichtrationaler Funktionen

Bei der Ermittlung von Nullstellen nichtrationaler Funktionen ist die Anwendung eines „formelmäßigen“ Standardverfahrens nur unter bestimmten Bedingungen möglich. Will man beispielsweise Nullstellen von Wurzelfunktionen berechnen, so lassen sich die dafür zu lösenden Wurzelgleichungen in einfachen Fällen durch (ggf. mehrfaches) Quadrieren in lineare oder quadratische Gleichungen umformen und dann mit den bekannten Methoden lösen.

¹⁾ Als Schlussformel von Beweisen wird mitunter auch „q.e.d.“ verwendet, was für das lateinische „*quod erat demonstrandum*“ steht.

A 13 Beispiel A 13:

Zu ermitteln sind die Nullstellen folgender Wurzelfunktionen (Fig. A 19):

a) $f_1(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$; $D_{f_1} = [0; +\infty[$, $W_{f_1} =]-\infty; 0]$

Nullstellenermittlung: $0 = -\frac{1}{2}\sqrt{x} \Rightarrow 0 = \frac{1}{4}x$, also $x_0 = 0$

Probe: $-\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$ und damit $0 = 0$

b) $f_2(x) = \sqrt{x} - 1$; $D_{f_2} = [0; +\infty[$, $W_{f_2} = [-1; +\infty[$

Nullstellenermittlung: $0 = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1$, also $x_0 = 1$

Probe: $\sqrt{1} - 1 = 0$ und damit $0 = 0$

c) $f_3(x) = \sqrt{x+2} + x$; $D_{f_3} = [-2; +\infty[$, $W_{f_3} = [-2; +\infty[$

Nullstellenermittlung:

$$0 = \sqrt{x+2} + x \Rightarrow -x = \sqrt{x+2}, \text{ also } x^2 = x+2 \quad (\text{da } x+2 \geq 0).$$

Damit erhalten wir:

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ mit den Lösungen } x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}, \text{ also } x_1 = 2, x_2 = -1.$$

Probe für $x_1 = 2$: $\sqrt{2+2} + 2 = 4 \neq 0$; Probe für $x_2 = -1$: $\sqrt{-1+2} - 1 = 0$

Also ist nur $x_2 = -1$ eine Nullstelle von f_3 .

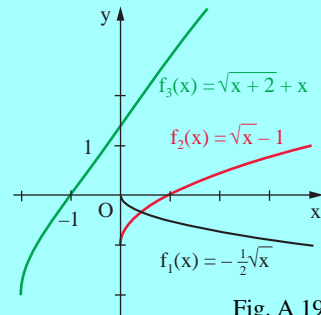


Fig. A 19

Das Beispiel der Funktion $f_3(x) = \sqrt{x+2} + x$ lässt erkennen, dass nicht jede Lösung der sich durch die Umformung ergebenden quadratischen Gleichung die Wurzelgleichung erfüllt. Das liegt daran, dass das Quadrieren eine so genannte „Gewinnumformung“ darstellt: Es werden scheinbar Lösungen dazugewonnen – Ausgangsgleichung und die durch Quadrieren erhaltene Gleichung sind zueinander nicht äquivalent. Deshalb ist beim Lösen von Wurzelgleichungen eine Probe unverzichtbar.

Bei der Nullstellenbestimmung anderer nichtrationaler Funktionen kann man sich durch inhaltliche Überlegungen zu den Eigenschaften der jeweiligen Funktion bzw. durch grafische Darstellungen helfen. Minimiert wird der Aufwand durch Verwenden eines GTA.

A 14 Beispiel A 14:

Man ermittle die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 10^{3x-5} - 100$

b) $g(x) = 5 \sin x + 2 \quad (0 \leq x < 2\pi)$

c) $h(x) = 10^{0,1x} - \sin x \quad (x > -4)$

Zu a):

Aus $10^{3x-5} - 100 = 0$ bzw. $10^{3x-5} = 100$ erhält man durch Logarithmieren zur Basis 10 $3x - 5 = 2$, also $x = \frac{7}{3}$.

Probe: $10^{3 \cdot \frac{7}{3} - 5} - 100 = 10^{7-5} - 100 = 0$ Vergleich: $0 = 0$

Zu b):

Aus $5 \sin x + 2 = 0$ erhält man $\sin x = -\frac{2}{5}$ und damit (z. B. unter Verwendung eines Taschenrechners sowie bei Beachtung der Vorzeichen, welche die Sinusfunktion in den einzelnen Quadranten besitzt):

$$x_1 = \pi + 0,411 \approx 3,552 \quad x_2 = 2\pi - 0,411 \approx 5,871$$

Eine Probe (z.B. wieder mit dem Taschenrechner) bestätigt die Richtigkeit der Resultate.

Fig. A 20 zeigt den Graphen der Funktion $g(x) = 5 \sin x + 2$ im Intervall $0 \leq x < 2\pi$, woraus sich die Nullstellen ebenfalls näherungsweise ablesen ließen.

Zu c):

Wenn keine Hilfsmittel wie grafikfähige Taschenrechner oder Computer zur Verfügung stehen, könnten in diesem Falle durch eine grafische Darstellung (nach Aufstellen einer Wertetabelle, unter Verwendung eines Taschenrechners für $10^{0,1x}$ und $\sin x$) zumindest Näherungslösungen ermittelt werden. Wesentlich einfacher erhält man diese mittels eines GTA. Fig. A 21 und A 22 geben die Schirmbilder für den Fall wieder, dass die Nullstelle (bei $x_0 > -4$) als Abszisse des **Schnittpunkts** zwischem dem Graphen von f und der x -Achse (Fig. A 21) bzw. mittels des Befehls **Intersection** als Abszisse des Schnittpunkts zwischen den Graphen von $h_1(x) = 10^{0,1x}$ und $h_2(x) = \sin x$ (Fig. A 22) ermittelt werden soll. In beiden Fällen erhalten wir als Nullstelle $x_0 \approx -3,6$.

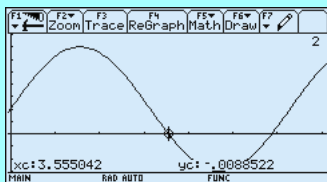


Fig. A 20

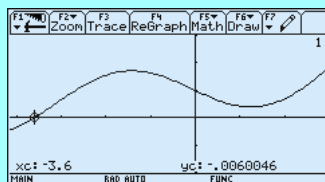


Fig. A 21

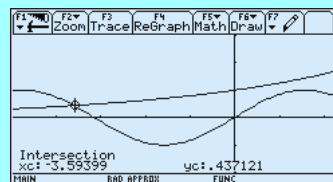
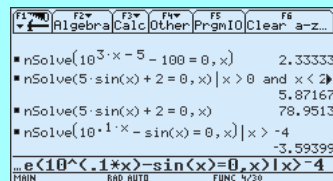


Fig. A 22

Werden die obige Aufgaben a) bis c) mithilfe eines GTA gelöst, so erhält man nebenstehendes Schirmbild.

Anmerkung: Die Lösung 78.9513 für Aufgabe b) ergibt sich, wenn man keine Einschränkung des Lösungsgrundbereichs auf $0 \leq x < 2\pi$ vornimmt.

Fig. A 23



A 4 Weitere reelle Funktionen

Bei der Deutschen Post AG gilt für die Beförderung von Briefen eine Gebührenordnung. In Abhängigkeit von der Masse des Briefes wird eine bestimmte Beförderungsgebühr erhoben (s. nachstehende Tabelle, Stand 1. Juli 1999).

	Briefmasse	Beförderungsgebühr (Porto)	
Standardbrief	bis 20 g	1,10 DM	(0,56 €)
Kompaktbrief	bis 50 g	2,20 DM	(1,12 €)
Großbrief	bis 500 g	3,00 DM	(1,53 €)
Maxibrief	bis 1000 g	4,40 DM	(2,25 €)

Die Zuordnung „Briefmasse \rightarrow Beförderungsgebühr“ stellt eine Funktion dar; bestimmten Masseintervallen wird genau eine Beförderungsgebühr zugeordnet (Fig. A 24)¹⁾.

¹⁾ Anmerkung:

„●“ bedeutet: Der Punkt gehört zum Graphen der Funktion.

„○“ bedeutet: Der Punkt gehört nicht zum Graphen der Funktion.

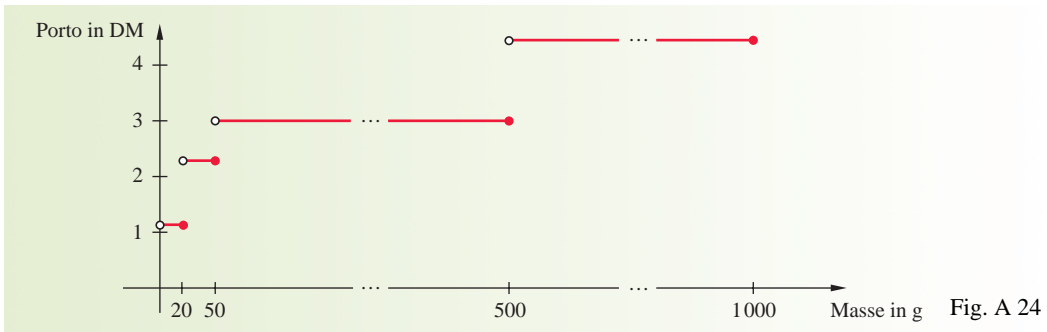


Fig. A 24

Man nennt eine Funktion dieser Art **abschnittsweise definierte Funktion**. Für solche Funktionen ist charakteristisch, dass sie für verschiedene Abschnitte ihres Definitionsbereiches durch unterschiedliche Funktionsterme definiert sind.

Bezeichnet man die Beförderungsgebühr (Porto) mit p (in DM) und die Briefmasse mit m (in g), so lässt sich der funktionale Zusammenhang folgendermaßen beschreiben:

$$p(m) = \begin{cases} 1,10 & \text{für } 0 < m \leq 20; \\ 2,20 & \text{für } 20 < m \leq 50; \\ 3,00 & \text{für } 50 < m \leq 500; \\ 4,40 & \text{für } 500 < m \leq 1000. \end{cases}$$

Für abschnittsweise definierte Funktionen ist charakteristisch, dass ihr Definitionsbereich aus speziellen Teilmengen, aus einem **Intervall** oder aus *Abschnitten* von \mathbb{R} gebildet wird. Für die genauere Kennzeichnung von Intervallen verwenden wir folgende Begriffe bzw. Symbole („Formeln und Tabellen“, S. 21):

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ist $a < b$, so heißt

- $[a; b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall von a bis b ;
- $]a; b[= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x < b\}$ offenes Intervall von a bis b ;
- $]a; b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall von a bis b .
- $[a; b[= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } a \leq x < b\}$

a und b sind jeweils die Intervallenden.

– Die Betragsfunktion

Die Funktion f , die jedem $x \in \mathbb{R}$ den Betrag von x zuordnet, heißt **Betragsfunktion**.

Kurz: $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Wertebereich ist die Menge aller positiven reellen Zahlen einschließlich der 0. Mithilfe der Definition des absoluten Betrages einer reellen Zahl x

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0; \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

kann die Funktionsgleichung der Betragsfunktion in die Form

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0; \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

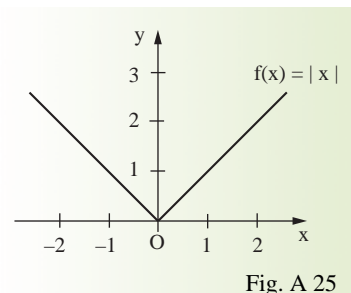


Fig. A 25

gebracht werden. Man sagt: Die Betragsfunktion wurde abschnittsweise definiert.

Der Graph der Betragsfunktion besteht dementsprechend aus zwei Strahlen, die im Koordinatenursprung $(0; 0)$ ihren Anfangspunkt haben (Fig. A 25). Allgemein bezeichnet man jede Funktion als Betragsfunktion, in deren Funktionsgleichung die unabhängige Variable in Betragszeichen steht.

A 15

Beispiel A 15:

Wir betrachten die Betragsfunktionen $f_1(x) = |x + 3|$ und $f_2(x) = |x - 2|$. Beide Funktionen sind über der Menge aller reellen Zahlen definiert und besitzen als Wertebereich die Menge aller positiven reellen Zahlen einschließlich der 0.

Das Auflösen der Betragszeichen führt zu

$$f_1(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{für } x \geq -3; \\ -x - 3 & \text{für } x < -3 \end{cases}$$

und

$$f_2(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{für } x \geq 2; \\ -x + 2 & \text{für } x < 2. \end{cases}$$

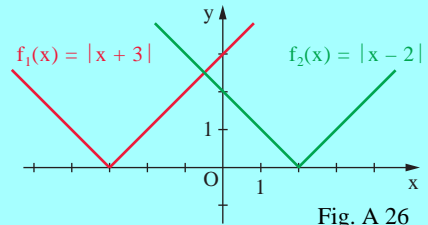


Fig. A 26

Aufgrund der „Wirkungsweise“ des Betrages (es werden stets nichtnegative Zahlen erzeugt) ist auch leicht verständlich, dass man bei den betrachteten Betragsfunktionen die zugehörigen Graphen aus den entsprechenden Graphen der linearen Funktionen $f_1^*(x) = x + 3$ bzw. $f_2^*(x) = x - 2$ erhält, indem man jeweils den unterhalb der x-Achse liegenden Teil der Geraden an der x-Achse spiegelt (Fig. A 27).

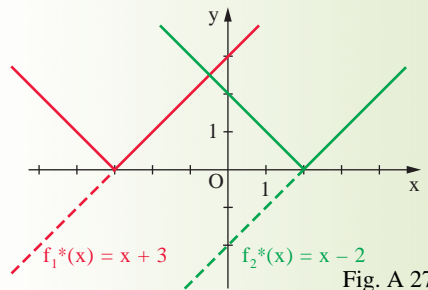


Fig. A 27

Ausgehend vom Beispiel A 15 lässt sich feststellen: Man erhält den Graphen einer beliebigen Betragsfunktion $f(x) = |x - a|$ mit $a \in \mathbb{R}$, indem man den Graphen der Betragsfunktion $f^*(x) = |x|$ um $|a|$ Längeneinheiten nach rechts ($a < 0$) bzw. links ($a > 0$) verschiebt.

Beispiel A 16:

Die Betragsfunktion $f(x) = |x^2 - 4|$ ist grafisch darzustellen.

Die Funktion hat den Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$ und ihr Wertebereich ist die Menge aller positiven reellen Zahlen einschließlich der 0. An den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ besitzt die Funktion Nullstellen. Hier weist der Graph der Funktion „Spitzen“ auf.

Auflösen der Betragszeichen ergibt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{für } x \geq 2; \\ -x^2 + 4 & \text{für } -2 < x < 2; \\ x^2 - 4 & \text{für } x \leq -2. \end{cases} \quad (\text{Fig. A 28})$$

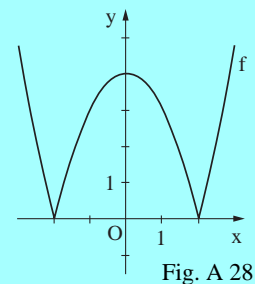


Fig. A 28

A 16

– Die Vorzeichenfunktion (Signumfunktion)

Die Funktion f , die jeder positiven reellen Zahl die Zahl 1, der Zahl 0 wiederum die Zahl 0 und jeder negativen reellen Zahl die Zahl -1 zuordnet, heißt **Vorzeichenfunktion** (Signumfunktion). Sie lässt sich durch folgende Funktionsgleichungen abschnittsweise beschreiben (Fig. A 29):

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

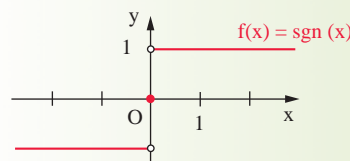


Fig. A 29

Der Definitionsbereich der Vorzeichenfunktion ist $D_f = \mathbb{R}$; ihr Wertebereich besteht nur aus den Elementen 1, 0 und -1 . Diese Funktion ordnet gewissermaßen jeder reellen Zahl ihr Vorzeichen zu.

A 17

Beispiel A 17:

Wir betrachten die Funktion $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \operatorname{sgn} x$. Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Mithilfe der Definition der Vorzeichenfunktion erhält man eine abschnittsweise Beschreibung dieser Funktion.

Demnach gilt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{für } x > 0; \\ 0, & \text{für } x = 0; \\ -x^2 - 1, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Fig A 30 zeigt den Graphen von f .

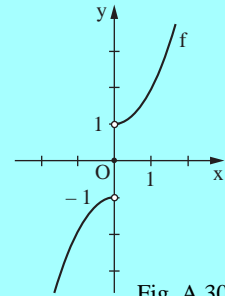


Fig. A 30

– Die Ganzzteilmfunktion (GAUSSsche Klammerfunktion)

Im Rahmen von Computerprogrammen oder auch in anderen mathematischen Anwendungen ist es oft notwendig, in Form von Dezimalbrüchen gegebenen reellen Zahlen bestimmte ganze Zahlen zuzuordnen. Dies leistet beispielsweise die **Ganzzteilmfunktion** (auch GAUSSsche Klammerfunktion oder Integerfunktion genannt) $f(x) = [x]$.

Unter dem Term $[x]$ (der so genannten GAUSS-Klammer) versteht man dabei die größte ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$, die kleiner oder gleich x ist. Die Ganzzteilmfunktion hat den Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$ sowie den Wertebereich $W_f = \mathbb{Z}$ und wird häufig in der Form geschrieben:

$$f(x) = \operatorname{INT}(x) = [x] = \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ ganzzahlig ist;} \\ \text{die zu } x \text{ nächstkleinere ganze Zahl, falls } x \text{ nicht ganzzahlig ist.} \end{cases}$$

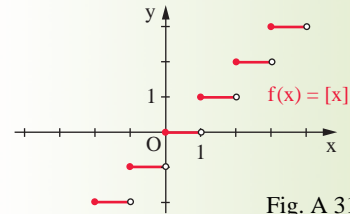


Fig. A 31

Den Graph von f zeigt die Fig. A 31. Aufgrund der Ähnlichkeit mit einer Treppe spricht man gelegentlich auch von einer *Treppenfunktion*.

A 18

Beispiel A 18:

Die Ganzzteilmfunktion lässt sich zum Beschreiben des auf der Einleitungsseite, S. 9(3), geschilderten Sachverhalts nutzen. Nehmen wir an, der Ladeprozess erfolgt linear, dann würde die aktuelle Ladung k des Kondensators im Zeitintervall $[0; 3[$ durch $k_1 = \frac{2}{3}t$ angegeben.

Für $[3; 6[$ ergäbe sich $k_2 = \frac{2}{3}t - 2 \cdot 1$, für $[6; 9[$ dann $k_3 = \frac{2}{3}t - 2 \cdot 2$ usw. Die Funktion $k(t)$ könnte also abschnittsweise unter Verwendung verschiedener Funktionsterme für die einzelnen Zeitintervalle beschrieben werden. Nutzt man aber die Ganzzteilmfunktion, so wäre eine zusammenfassende Darstellung durch $k(t) = \frac{2}{3}t - 2 \operatorname{INT}(\frac{1}{3}t)$ möglich (Fig. A 32).

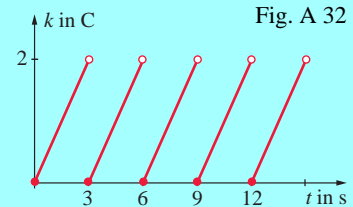


Fig. A 32

Mit der Betragsfunktion, der Vorzeichenfunktion und der Ganzzteilmfunktion haben wir einige spezielle abschnittsweise definierte Funktionen kennen gelernt. Derartige Funktionen kann man aber auch ganz beliebig bilden. Wir betrachten etwa die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{für } x < 0; \\ 2, & \text{für } 0 \leq x < 2; \\ \frac{1}{4}x^2, & \text{für } x \geq 2. \end{cases} \quad (\text{Fig. A 33})$$

Die Graphen abschnittsweise definierter Funktionen kann man in den einzelnen Abschnitten als geschlossenen Kurvenzug zeichnen. Für die so genannte **DIRICHLETSche Funktion**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

lässt sich der Graph nicht einmal abschnittsweise als geschlossene Linie zeichnen. Die grafische Darstellung dieser Funktion besteht aus der Menge aller Punkte mit irrationaler Abszisse auf der x-Achse und aus der Menge aller Punkte mit rationaler Abszisse

auf der Parallelen zur x-Achse durch $y = 1$. Sie darzustellen ist unmöglich. Eine gewisse Vorstellung der DIRICHLETSchen Funktion liefert Fig. A 34 nur in Verbindung mit der Einsicht, dass die Menge der rationalen Zahlen überall dicht ist, trotzdem aber nicht alle Punkte der Zahlengeraden erfasst. Es treten Lücken auf. Entsprechendes gilt für die Menge der irrationalen Zahlen.

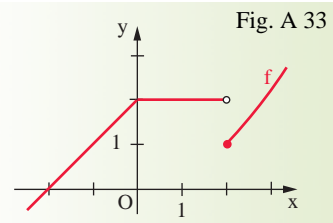


Fig. A 33

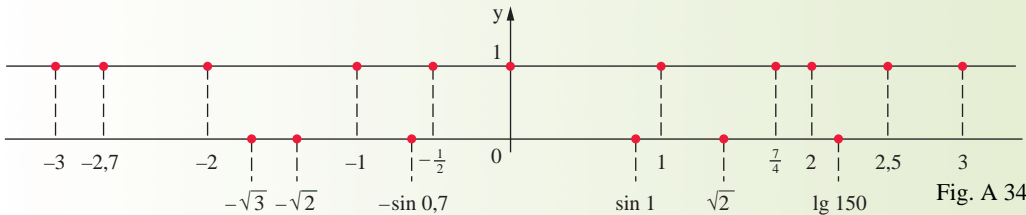


Fig. A 34

A 5 Verknüpfen, Verketteten und Umkehren von Funktionen

Aus bekannten Funktionen können auf unterschiedliche Art und Weise neue Funktionen gebildet werden, welche sich häufig erheblich von ihren Ausgangsfunktionen unterscheiden. Eine erste Möglichkeit ist das **Verknüpfen** der entsprechenden Funktionsgleichungen (kurz: der Funktionen) mithilfe der Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. So lassen sich etwa die Funktionen $f(x) = 3x + 2$ und $g(x) = -2x - 3$ dadurch verknüpfen, dass man ihre Funktionsterme addiert. Man erhält auf diese Weise die Funktion $s(x) = x - 1$ (Fig. A 35).

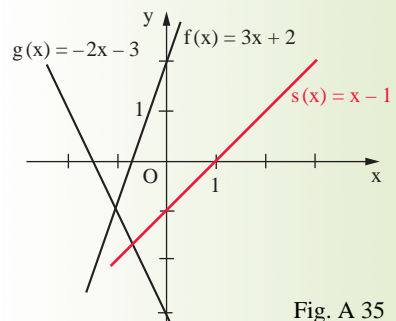


Fig. A 35

Definition A 7:

Sind zwei Funktionen f und g mit den Gleichungen $y = f(x)$ bzw. $y = g(x)$ auf den Definitionsmengen D_f bzw. D_g erklärt, so heißt die **Verknüpfung**

$$s = f + g \quad \text{mit} \quad s(x) = f(x) + g(x), \quad D_s = D_f \cap D_g$$

$$d = f - g \quad \text{mit} \quad d(x) = f(x) - g(x), \quad D_d = D_f \cap D_g$$

$$p = f \cdot g \quad \text{mit} \quad p(x) = f(x) \cdot g(x), \quad D_p = D_f \cap D_g$$

$$q = \frac{f}{g} \quad \text{mit} \quad q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad D_q = D_f \cap D_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$$

Summe,

Differenz,

Produkt und

Quotient der Funktionen f und g .

A 19

Beispiel A 19:

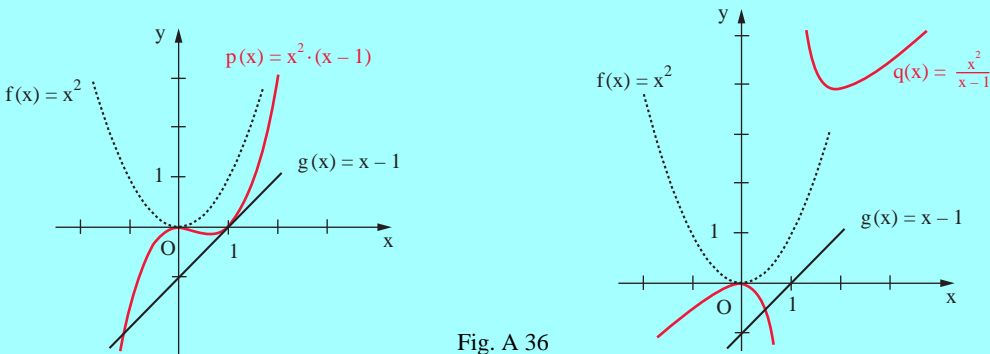
Wir betrachten die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - 1$ mit $D_f = D_g = \mathbb{R}$.Das Produkt $f \cdot g$ ergibt $p(x) = x^2 \cdot (x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.Als Quotient $\frac{f}{g}$ erhält man $q(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (Fig. A 36).

Fig. A 36

Eine weitere Möglichkeit, aus gegebenen Funktionen neue Funktionen zu bilden, stellt das *Nacheinanderausführen* bzw. *Verketteten* zweier Zuordnungsvorschriften dar.

Betrachtet werden dazu die Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = 2x$. Wir wenden in einem ersten Schritt auf einen Wert x aus dem Definitionsbereich von g die Zuordnungsvorschrift der Funktion g an und erhalten so den Funktionswert $g(x)$. Anschließend wird in einem zweiten Schritt auf den Wert $g(x)$ die Zuordnungsvorschrift der Funktion f angewendet. Also:

*Erster Schritt*Zuordnungsvorschrift g („Verdopple!“):Anwendung von g auf x ergibt $g(x) = 2x$.*Zweiter Schritt*Zuordnungsvorschrift f

(„Sinuswert bilden!“):

Anwendung von f auf $g(x) = 2x$ ergibt $f(2x) = \sin 2x$.Entstanden ist also die neue Funktion v mit $v(x) = \sin 2x$.

A 8

Definition A 8:

Die Funktion v mit $v(x) = f(g(x))$ heißt **Verkettung von f und g** . Man schreibt $v = f \circ g$. Die Funktion f nennt man **äußere Funktion**, die Funktion g **innere Funktion** der verketteten Funktion v . Die Verkettung v ist definiert für alle x , für welche die Funktionswerte von g (also $g(x)$) zum Definitionsbereich von f gehören.

Den Inhalt der Definition A 8 veranschaulicht Fig. A 37.

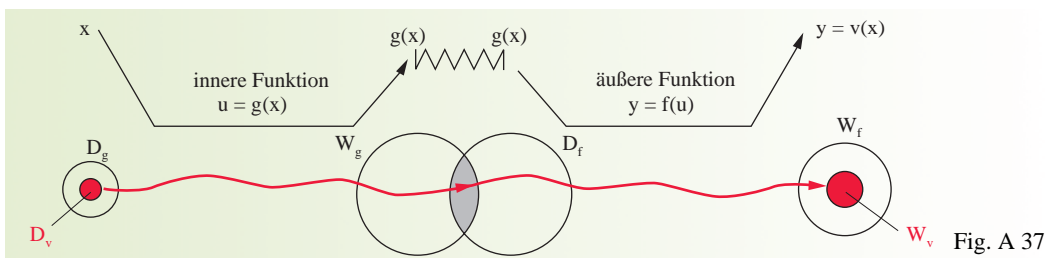


Fig. A 37

Eine Verkettung der äußeren Funktion f mit der inneren Funktion g zur Funktion $v = f \circ g$ bedeutet demnach, dass man Funktionswerte $g(x)$ der inneren Funktion g zu Argumenten der äußeren Funktion f macht. Der Wertebereich der inneren Funktion g muss daher ganz oder teilweise zum Definitionsbereich der äußeren Funktion f gehören. Für den Definitionsbereich der durch Verkettung von f und g entstandenen Funktion $v = f \circ g$ (gesprochen „ f nach g “) gilt also:

$$D_v = \{x \mid x \in D_g \text{ und } g(x) \in D_f\}$$

Wir beachten: Eine Verkettung von Funktionen ist nur dann möglich, wenn die Schnittmenge aus dem Definitionsbereich der äußeren Funktion und dem Wertebereich der inneren Funktion nicht leer ist.

Beispiel A 20:

Die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) und g mit $g(x) = x^2 - 1$ ($x \in \mathbb{R}$) sind zu verketteten.

a) $v_1 = f \circ g$ (f nach g).

Da die Funktionswerte von g für $-1 < x < 1$ negativ sind, f aber nur für nichtnegative reelle Zahlen definiert ist, muss man zunächst den Definitionsbereich von g so einschränken, dass $g(x) \geq 0$ gilt. Nur dann ist die Verkettung $f \circ g$ möglich. Es muss also gelten:

$$x^2 - 1 \geq 0 \text{ bzw. } x^2 \geq 1 \text{ und}$$

damit $|x| \geq 1$, d. h. $x \leq -1$ oder $x \geq 1$.

Mit der äußeren Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) und der inneren Funktion $g(x) = x^2 - 1$ ($x \leq -1$ oder $x \geq 1$) ergibt sich die Verkettung $v_1 = f \circ g$ als

$$v_1(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Der Definitionsbereich von v_1 ist

$D_{v_1} = \{x \mid x \leq -1 \text{ oder } x \geq 1\}$ und der Wertebereich $W_{v_1} = \{y \mid y \geq 0\}$ (Fig. A 38).

Aus den Funktionen f und g lässt sich aber auch die Verkettung $g \circ f$ bilden:

b) $v_2 = g \circ f$ (g nach f)

Mit der äußeren Funktion $g(x) = x^2 - 1$ und der inneren Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) ergibt sich die Verkettung $v_2 = g \circ f$ als

$$v_2(x) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1.$$

Der Definitionsbereich von v_2 ist $D_{v_2} = \{x \mid x \geq 0\}$ und der Wertebereich $W_{v_2} = \{y \mid y \geq -1\}$ (Fig. A 39).

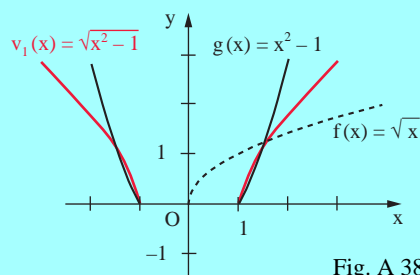


Fig. A 38

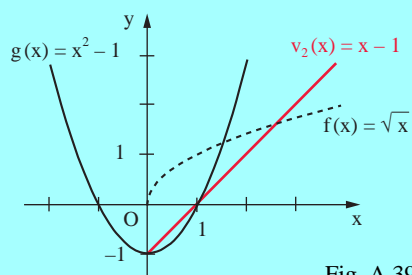


Fig. A 39

Beispiel A 21:

Gegeben ist die Verkettung v mit $v(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Innere und äußere Funktion sowie Definitions- und Wertebereich von v sind zu bestimmen.

Die innere Funktion ist $g(x) = \frac{1}{x}$ mit $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $W_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Die äußere Funktion ist $f(x) = \sin x$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = [-1; 1]$.

Der Definitionsbereich von $v(x) = f \circ g$ ist also $D_v = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und der Wertebereich $W_v = [-1; 1]$.

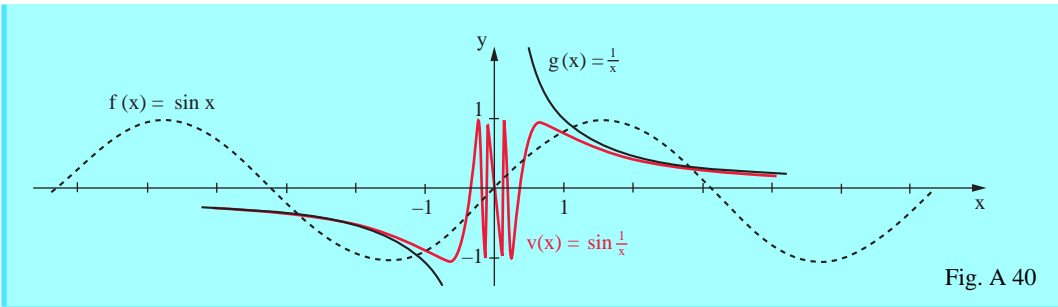


Fig. A 40

Eine dritte Möglichkeit für das Gewinnen neuer Funktionen besteht darin, die gegebene Zuordnungsvorschrift *umzukehren*, wobei zu fragen ist, ob diese Umkehrung wieder eine Funktion darstellt.

Beispielsweise wird durch eine Funktion f mit $f(x) = 2x - 1$ nicht nur jedem $x \in D_f$ eindeutig ein $y \in W_f$ zugeordnet, sondern auch umgekehrt jedem $y \in W_f$ eindeutig ein $x \in D_f$. Falls diese letztgenannte eindeutige Zuordnung existiert, bezeichnet man sie als *Umkehrfunktion* der Ausgangsfunktion.

A 9

Definition A 9:

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **umkehrbar**, wenn die durch sie vermittelte Zuordnung f **umkehrbar eindeutig** ist. Die **Umkehrfunktion** (auch *inverse Funktion* von f genannt) wird mit f^{-1} bezeichnet. Es ist stets $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$.

Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion gewinnt man, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x (falls dies möglich ist) auflöst und die Bezeichnungen y und x vertauscht, damit die Umkehrfunktion in dem für die Ausgangsfunktion üblichen x - y -Koordinatensystem dargestellt werden kann.

Wir kehren zu obigem Beispiel zurück und ermitteln die Gleichung der Umkehrfunktion:

$$f: y = 2x - 1, \text{ also } x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \text{ und nach Vertauschen } f^{-1}: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ist die Gleichung der Umkehrfunktion zur Funktion $f(x) = 2x - 1$ (Fig. A 41).

Zeichnet man den Graphen der Funktion f und den Graphen ihrer Umkehrfunktion f^{-1} in ein und dasselbe rechtwinklige Koordinatensystem, so stellt man fest: Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} ist das Spiegelbild des Graphen von f an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten. Auf grafischem Wege kann man also die Umkehrfunktion f^{-1} ermitteln, indem man den Graphen der Ausgangsfunktion f an der Geraden $y = x$ spiegelt.

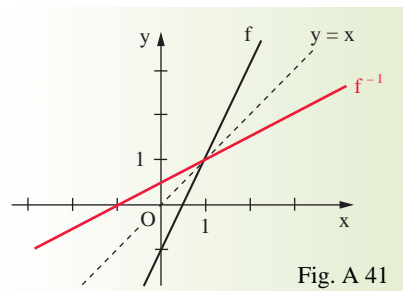


Fig. A 41

A 22

Beispiel A 22:

Es soll die Umkehrung der Funktion f mit $f(x) = x^2$ ermittelt werden.

Bereits die Wertetabelle zeigt, dass es sich bei der Funktion $f(x) = x^2$ nicht um eine umkehrbar eindeutige (eindeutige) Zuordnung handelt: Jedem y -Wert (mit Ausnahme der 0) sind zwei x -Werte zugeordnet.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Zerlegt man jedoch f in

$$f_1: y = x^2 \quad D_{f_1} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq 0\}, W_{f_1} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ und } y \geq 0\} \text{ und}$$

$$f_2: y = x^2 \quad D_{f_2} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}, W_{f_2} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ und } y \geq 0\},$$

dann existieren deren Umkehrungen.

Aus $y = x^2$ folgt $|x| = \sqrt{y}$, d. h.

für $x \leq 0$: $-x = \sqrt{y}$, also $x = -\sqrt{y}$, und

für $x \geq 0$: $x = \sqrt{y}$.

Vertauschen von x und y liefert die Gleichungen der Umkehrfunktionen

$$f_1^{-1}: y = -\sqrt{x}, \text{ also } y \leq 0; \quad f_2^{-1}: y = \sqrt{x}, \text{ also } y \geq 0.$$

Fig. A 42 zeigt die Graphen aller vier Funktionen.

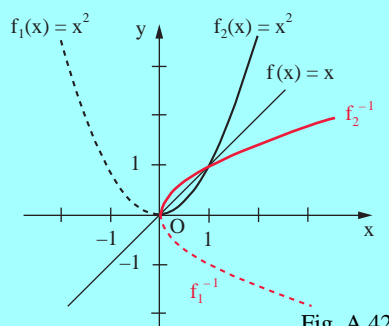


Fig. A 42

Beispiel A 23:

Auch bei der Funktion mit der Gleichung $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) handelt es sich um keine eindeutige Zuordnung: Aufgrund der Periodizität der Sinusfunktion gehören zu jedem Funktionswert $f(x)$ mit $-1 \leq f(x) \leq 1$ unendlich viele x -Werte. Die Umkehrfunktion kann deshalb nur für bestimmte Teilmengen des Definitionsbereichs gebildet werden, z. B. für $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Um für die Funktion $f_1(x) = \sin x$ mit $D_{f_1} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$,

$W_{f_1} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ und } -1 \leq y \leq 1\}$ die Umkehrfunktion zu ermitteln, geht man folgendermaßen vor:

(1) Auflösen der Gleichung $y = \sin x$ nach x . Dazu wird (ähnlich wie im Beispiel A 22 mit der Wurzelfunktion) eine neue Funktionsbezeichnung eingeführt. Man schreibt: $x = \arcsin y$ (in Worten: x ist der Winkel in Bogenmaß (arc), dessen Sinus den Wert y besitzt.)

(2) Vertauschen von x und y führt zu $f^{-1}(x) = \arcsin x$ mit $D_{f_1^{-1}} = [-1; 1]$ und $W_{f_1^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

(Die Graphen der Funktionen $f_1(x) = \sin x$ und $f^{-1}(x) = \arcsin x$ zeigt Fig. D 19)

Analog den **Arkussinusfunktionen** als Umkehrungen der Sinusfunktion gibt es auch die Arkuskosinusfunktionen als Umkehrungen der Kosinusfunktion – wiederum definiert über bestimmten Teilintervallen von \mathbb{R} , z.B.:

$$g_1(x) = \cos x \text{ mit } D_{g_1} = [0; \pi], W_{g_1} = [-1; 1]; g_1^{-1}(x) = \arccos x \text{ mit } D_{g_1^{-1}} = [-1; 1]; W_{g_1^{-1}} = [0; \pi]$$

Auf der Tastatur des GTA sind die Arkusfunktionen mit \sin^{-1} usw. bezeichnet

A 23

A 6 Funktionenscharen

Beispiel A 24:

Privaten Haushalten werden von den Stromversorgungsgesellschaften in der Regel Jahrestarife angeboten, die neben dem Energiepreis p (in Cent pro Kilowattstunde) auch noch einen festen Bereitstellungspreis b (in Euro pro Jahr) enthalten.

Dem Haushalt der Familie Bernstein liegen nun nebenstehende drei Angebote der Stromversorgungsgesellschaften Redstrom, Greenstrom und Bluestrom zur Auswahl vor:

Gesellschaft	Energiepreis p	Bereit.-preis b
Redstrom	$p_R = 5,78$	$b_R = 183,00$
Greenstrom	$p_G = 7,38$	$b_G = 71,00$
Bluestrom	$p_B = 8,98$	$b_B = 23,00$

A 24

Welches Angebot ist für den Haushalt der Familie Bernstein am preisgünstigsten, wenn ihr durchschnittlicher Jahresbedarf an Elektroenergie 4500 kWh beträgt?

Um zu einer Entscheidung zu gelangen, berechnen wir die Jahreskosten J , die bei den einzelnen Anbietern entstehen würden. Mit x in Kilowattstunden gilt für

$$\begin{array}{ll} \text{Redstrom} & J_R(x) = 0,0578x + 183, \\ \text{Greenstrom} & J_G(x) = 0,0738x + 71, \\ \text{Bluestrom} & J_B(x) = 0,0898x + 23. \end{array} \quad \text{also für 4500 kWh im Jahr: } \begin{cases} J_R(4500) = 443,10 \text{ €} \\ J_G(4500) = 403,10 \text{ €} \\ J_B(4500) = 427,10 \text{ €} \end{cases}$$

Allgemein kann man bei einem jährlichen Energieverbrauch x (in Kilowattstunden) die Jahreskosten $J(x)$ (in Euro) für einen Haushalt bei beliebigen Energie- und Bereitstellungspreisen p bzw. b durch die Funktion $J_{p,b}(x) = \frac{p}{100} \cdot x + b$ mit den Parametern p und b beschreiben. Fig. A 43 zeigt die Graphen der zugehörigen Graphenschar R, G, B für $p = 5,78$ (7,38; 8,98) und $b = 183$ (71 bzw. 23).

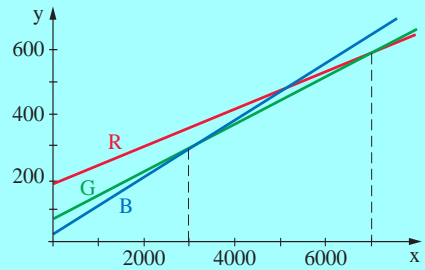


Fig. A 43

Aus den Graphen lässt sich ablesen, bei welchem Energieverbrauch x es für die Familie Bernstein u. U. lohnend ist, den Stromversorger zu wechseln. Man sieht: Unterhalb von 3000 kWh ist Bluestrom günstiger als Greenstrom (und Redstrom). Zwischen 3000 und 7000 kWh ist Greenstrom billiger als Bluestrom und Redstrom – und oberhalb von 7000 kWh hat Redstrom das vorteilhafteste Angebot.

Das Beispiel A 24 macht deutlich, dass Parameter in additiver und multiplikativer Verknüpfung mit der Funktionsvariablen auftreten können. Welchen Einfluss ein derartiger Summand bzw. Faktor auf die Eigenschaften und auf den Verlauf der Graphen von Funktion nimmt, soll am Beispiel der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ untersucht werden.

A 25

Beispiel A 25:

Man zeichne die Graphen folgender Funktionen jeweils in ein Koordinatensystem:

a) $f(x) = x^2$

$g_1(x) = x^2 - 1$

$g_2(x) = x^2 + 2$

$g_3(x) = x^2 - 2$

b) $f(x) = x^2$

$g_1(x) = (x - 1)^2$

$g_2(x) = (x + 2)^2$

$g_3(x) = (x - 4)^2$

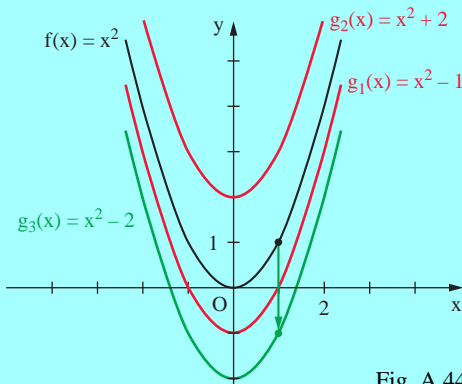


Fig. A 44

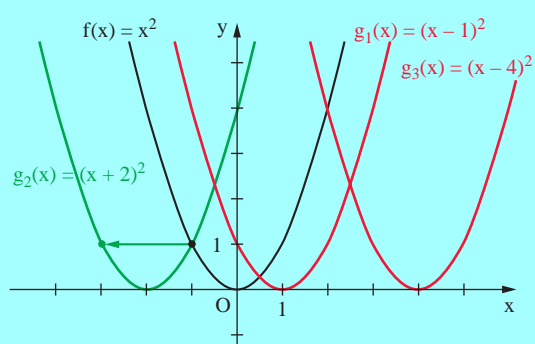


Fig. A 45

Ausgehend von obigem Beispiel lässt sich feststellen:

- Wird zum Funktionswert $f(x)$ einer Funktion f eine Zahl c ($c \in \mathbb{R}$) addiert, d. h., gehen wir von der Funktion $y = f(x)$ zu den Funktionen $y = f(x) + c$ über (s. Beispiel A 25a)), so erhalten wir die Graphen dieser Funktionen durch Verschiebung des Graphen der Funktion f in Richtung der y -Achse mit $|c|$ Einheiten, und zwar für $c > 0$ in Richtung des positiven Teils, für $c < 0$ in Richtung des negativen Teils der y -Achse.

Durch Variation von c entsteht eine durch die Gleichung $y = f(x) + c$ beschriebene **Funktionenschar** f_c – die Graphen dieser Funktionen bilden eine **Graphenschar**. Der Summand c wird **Scharparameter** genannt.

- Addiert man zu jedem Argument x einer Funktion f eine Zahl d ($d \in \mathbb{R}$), d. h., gehen wir von der Funktion $y = f(x)$ zu den Funktionen $y = f(x + d)$ über (s. Beispiel A 25b)), so ergeben sich die Graphen dieser Funktionen aus dem Graphen der ursprünglichen Funktion f durch *Verschiebung* in Richtung der x -Achse um $|d|$ Einheiten, und zwar für $d > 0$ in Richtung des negativen Teils, für $d < 0$ in Richtung des positiven Teils der x -Achse.

Auch in diesem Fall entsteht eine Funktionenschar f_d , hier mit dem Scharparameter d .

Schließlich soll noch der Einfluss des Faktors e beim Übergang von $y = f(x)$ zu $y = g(x) = e \cdot f(x)$ bzw. zu $y = h(x) = f(e \cdot x)$ untersucht werden.

Beispiel A 26:

Man zeichne die Graphen der folgenden Funktionen in ein Koordinatensystem:

$$f(x) = x^2$$

$$g_1(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot x^2$$

$$g_2(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$$

$$h_1(x) = f(2x) = (2 \cdot x)^2$$

$$h_2(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot x\right)^2$$

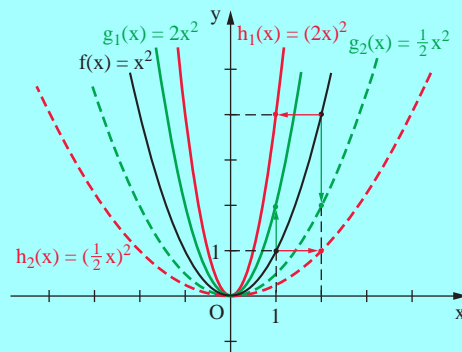


Fig. A 46

A 26

Hier lässt sich erkennen:

- Die Graphenscharen der jeweiligen Funktionenscharen entstehen in diesem Fall aus dem Graphen der Ausgangsfunktion durch *Geradenstreckung* senkrecht zur x -Achse (bei $y = e \cdot f(x)$ mit dem Faktor $|e|$) bzw. senkrecht zur y -Achse (bei $y = f(e \cdot x)$ mit dem Faktor $\frac{1}{|e|}$).

Durch unterschiedliches Einfügen der Parameter in die Ausgangsgleichung, durch Kombination der einzelnen Möglichkeiten und natürlich durch die Parameterwahl lassen sich aus einer Ausgangsfunktion unendlich viele „neue“ Funktionen erzeugen. Sind dabei die oben erläuterten geometrischen Zusammenhänge bekannt, so kann man die Graphen von Funktionen einer Funktionenschar ausgehend von *einem* Scharelement häufig relativ leicht zeichnen. Auch ist es möglich, bestimmte Eigenschaften der Funktionenschar mithilfe des Scharparameters auszudrücken. Beispielsweise kann man für die Funktionenschar $y = x^2 + c$ ($c \leq 0$) die Nullstellen in der Form $x_1 = \sqrt{-c}$ und $x_2 = -\sqrt{-c}$ angeben.

A 27

Beispiel A 27:

Gegeben sei der Graph einer Funktion $y = f(x)$. Man zeichne davon ausgehend die Graphen der Funktionen $y = f(x) - 2$ und $y = f(\frac{1}{2} \cdot x)$.

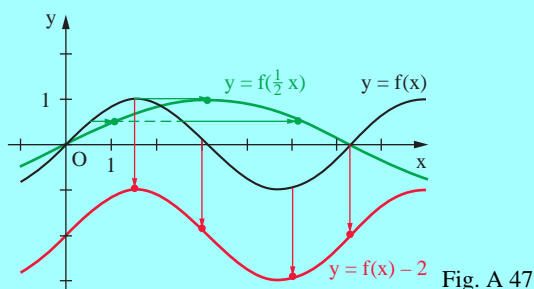


Fig. A 47

A 28

Beispiel A 28:

Gegeben ist eine Schar von Parabeln durch $f(x) = c \cdot x^2$ mit $c \neq 0$.

Es ist zu ermitteln, welche Parabel der Schar

- durch den Punkt $(4; -\frac{16}{5})$ geht,
- den Graphen der Funktion $g(x) = 2x - 4$ berührt.

Zu a): Einsetzen der Koordinaten des gegebenen Punktes in die Funktionsgleichung

$f(x) = c \cdot x^2$ liefert $-\frac{16}{5} = c \cdot 4^2$ und damit $c = -\frac{1}{5}$. Das heißt: Die Parabel mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{5}x^2$ geht durch den Punkt $(4; -\frac{16}{5})$.

Zu b): Zeichnet man die Graphen von $f_1(x) = x^2$ und $g(x) = 2x - 4$ in ein Koordinatensystem (Fig. A 48), so lässt sich erkennen, dass nur eine Parabel $f(x) = c \cdot x^2$ mit $0 < c < 1$ den Graph von g berühren kann. Wenn die Graphen von f und g einander berühren, also genau einen gemeinsamen Punkt besitzen sollen, so muss die durch Gleichsetzen der beiden zugehörigen Funktionsgleichungen erhaltene Gleichung genau eine Lösung besitzen:

Aus $c \cdot x^2 = 2x - 4$ erhält man $x^2 - \frac{2}{c}x + \frac{4}{c} = 0$ und damit $x_{1/2} = \frac{2}{c} \pm \sqrt{\frac{1-4c}{c^2}}$.

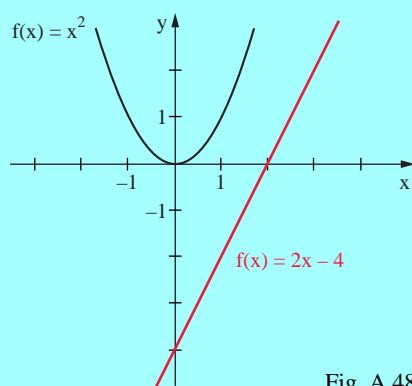


Fig. A 48

Genau eine Lösung ergibt sich für $1 - 4c = 0$, woraus $c = \frac{1}{4}$ folgt. Die gesuchte Parabel besitzt also die Gleichung

$$f_{1/4}(x) = \frac{1}{4}x^2.$$

Im vorliegenden einfachen Fall hätte man dieses Resultat auch durch systematisches Probieren (ggf. unter Verwendung eines GTA; Fig. A 49) und anschließendes rechnerisches Überprüfen finden können:

$$c = \frac{y}{x^2} \approx \frac{3,64705}{3,82353^2} \approx 0,2495 \approx \frac{1}{4}$$

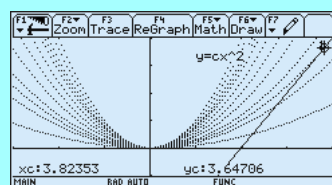


Fig. A 49